



**Chromodynamique Quantique aux collisionneurs  
hadroniques : Vers une automatisisation du calcul des  
processus multi-particules à l'ordre d'une boucle.  
Application à la production de deux photons et d'un jet**  
Farvah Mahmoudi

► **To cite this version:**

Farvah Mahmoudi. Chromodynamique Quantique aux collisionneurs hadroniques : Vers une automatisisation du calcul des processus multi-particules à l'ordre d'une boucle. Application à la production de deux photons et d'un jet. Physique des Hautes Energies - Expérience [hep-ex]. Université de Savoie, 2004. Français. NNT : . tel-00006725v2

**HAL Id: tel-00006725**

**<https://theses.hal.science/tel-00006725v2>**

Submitted on 29 Sep 2004

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ecole Doctorale de l'Université de Savoie  
Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique Théorique

Thèse de Doctorat en Physique Théorique  
Spécialité : Physique des Particules

par

**Farvah MAHMOUDI**

**Chromodynamique Quantique aux collisionneurs hadroniques :  
Vers une automatisisation du calcul  
des processus multi-particules à l'ordre d'une boucle.  
Application à la production de deux photons et d'un jet.**

Soutenue le 29 juin 2004  
Au LAPTH

Devant la commission d'examen composée de :

|                           |                    |
|---------------------------|--------------------|
| Dr. Patrick Aurenche      | Examineur          |
| Dr. Thomas Binoth         | Rapporteur         |
| Dr. Vittorio Del Duca     | Examineur          |
| Dr. Michel Fontannaz      | Rapporteur         |
| Dr. Jean-Philippe Guillet | Directeur de thèse |
| Prof. Pierre Salati       | Président          |



Ecole Doctorale de l'Université de Savoie  
Laboratoire d'Annecy-Le-Vieux de Physique Théorique

Thèse de Doctorat en Physique Théorique  
Spécialité : Physique des Particules

par

**Farvah MAHMOUDI**

**Chromodynamique Quantique aux collisionneurs hadroniques :  
Vers une automatisation du calcul  
des processus multi-particules à l'ordre d'une boucle  
Application à la production de deux photons et d'un jet**

Soutenue le 29 juin 2004  
au LAPTH

Devant la commission d'examen composée de :

|                           |                    |
|---------------------------|--------------------|
| Dr. Patrick Aurenche      | Examineur          |
| Dr. Thomas Binoth         | Rapporteur         |
| Dr. Vittorio Del Duca     | Examineur          |
| Dr. Michel Fontannaz      | Rapporteur         |
| Dr. Jean-Philippe Guillet | Directeur de thèse |
| Prof. Pierre Salati       | Président          |



*Tu verras, lorsque tu l'examines,  
que chaque particule recèle  
en son sein, un soleil.*

*Molavi (13<sup>ème</sup> siècle)*



# Remerciements

Toutes celles et ceux qui ont croisé mon chemin, qui ont influencé le cours de ma vie, je les estime énormément et je les remercie infiniment.

Je me permets plus particulièrement de remercier les membres du LAPTH, pour l'atmosphère agréable qu'ils savent répandre autour d'eux, les deux directeurs qui se sont succédés, Paul Sorba et Patrick Aurenche, pour m'avoir accueillie et avoir toujours été attentionnés et à l'écoute. Je remercie aussi Jean-Philippe Guillet, mon directeur de thèse, pour son aide et nos discussions enrichissantes. J'ai également apprécié les remarques et discussions avec Eric Pilon et Fawzi Boudjema, ainsi que l'aide en informatique de Daniel, Frank et Moha, les conseils de Luc, Pierre et Richard, et l'assistance de Dominique et Véronique. Merci aussi à tous les thésards, avec qui j'ai passé des moments mémorables. J'ai également beaucoup apprécié la collaboration avec Thomas Binoth et nos discussions.

Je suis aussi reconnaissante aux membres de mon jury de thèse d'avoir accepté de participer à ma soutenance.

Je tiens à remercier ma belle-famille pour son soutien, qui m'a été très cher. Et aussi celui pour qui mes remerciements ne suffisent pas, celui que mon cœur porte, mon époux Alexandre.

Enfin, ma gratitude va à mes parents, toute ma famille et mes amis en Iran, qui ont su accepter avec peine notre séparation, et qui m'ont toujours encouragée et soutenue. Mes pensées vont en particulier à mes neveux et nièces, Navid, Niloofar, Shaya et Fartous. Merci aussi à ma belle-soeur Azadeh et à Mâna, dont la naissance nous a apporté une immense joie.

Sur cette Terre il y a beaucoup de femmes et d'hommes de valeur, qui ont le souci permanent d'améliorer le monde, qui se sont sacrifiés d'une manière ou d'une autre, pour que la vie garde sa belle couleur. Je les estime tous, et je leur dédicace ce travail. J'ai eu la chance d'en connaître plus particulièrement un de près, qui m'a tant donné et qui m'a tant appris, et sans qui je n'en serais jamais là. Merci Farhad, mon frère!

*Nazila*





*A vous.*



# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Remerciements</b>   | <b>v</b>  |
| <b>Table des matières</b>  | <b>ix</b> |
| <b>Introduction</b>  | <b>1</b>  |
| <b>I Rappels théoriques et techniques</b>                                | <b>5</b>  |
| <b>1 QCD perturbative</b>  | <b>7</b>  |
| 1.1 Généralités . . . . .  | 7         |
| 1.2 Le Lagrangien de la QCD . . . . .                                    | 8         |
| 1.3 Règles de Feynman . . . . .  | 10        |
| 1.4 Les divergences et la renormalisation . . . . .                      | 13        |
| 1.4.1 Constante de couplage $\alpha_s$ et liberté asymptotique . . . . . | 14        |
| 1.4.2 Comptage de puissance . . . . .                                    | 15        |
| 1.5 Modèle des partons . . . . .   | 16        |
| Bibliographie . . . . .  | 20        |
| <b>2 Calculs et méthodes</b>   | <b>23</b> |
| 2.1 Calcul de sections efficaces . . . . .                               | 23        |
| 2.2 Méthode Amplitude d'hélicité . . . . .                               | 24        |
| 2.3 Eléments de calcul intégral . . . . .                                | 27        |
| Bibliographie . . . . .  | 28        |

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| <b>II</b> | <b>Calcul des processus multi-particules</b>  | <b>31</b>  |
| <b>3</b>  | <b>Méthodes de Réduction des intégrales</b>   | <b>33</b>  |
| 3.1       | Introduction . . . . .  | 33         |
| 3.2       | Intégrales scalaires . . . . .  | 34         |
| 3.3       | Intégrales tensorielles . . . . .   | 38         |
| 3.3.1     | Méthode . . . . .   | 39         |
| 3.3.2     | Résultats . . . . .   | 43         |
| 3.4       | Réduction des intégrales à $D$ dimensions . . . . .   | 45         |
|           | Bibliographie . . . . .   | 48         |
| <b>4</b>  | <b>Calcul des amplitudes : vers une automatisation</b>  | <b>51</b>  |
| 4.1       | Introduction . . . . .  | 51         |
| 4.2       | La méthodologie au travers d'un exemple : réaction $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$ à une boucle | 52         |
| 4.2.1     | Problématique . . . . .   | 52         |
| 4.2.2     | Application de la méthode Amplitude d'hélicité . . . . .  | 54         |
| 4.2.3     | Calcul des intégrales . . . . .   | 57         |
|           | Bibliographie . . . . .   | 60         |
| <b>5</b>  | <b>Application à la réaction <math>gg \rightarrow \gamma\gamma g</math></b>                         | <b>63</b>  |
| 5.1       | Introduction . . . . .  | 63         |
| 5.2       | Réaction $gg \rightarrow \gamma\gamma g$ . . . . .  | 64         |
| 5.2.1     | Problématique . . . . .   | 64         |
| 5.2.2     | Code informatique . . . . .   | 65         |
| 5.2.3     | Représentation invariante de jauge . . . . .  | 70         |
| 5.3       | A compact representation of the $\gamma\gamma ggg \rightarrow 0$ amplitude (article) . . . . .      | 73         |
|           | Bibliographie . . . . .   | 91         |
| <b>6</b>  | <b>Etude phénoménologique</b>   | <b>95</b>  |
| 6.1       | Introduction . . . . .  | 95         |
| 6.2       | Carré de l'amplitude et section efficace . . . . .  | 95         |
| 6.2.1     | Calcul du carré de l'amplitude . . . . .  | 96         |
| 6.2.2     | Limites colinéaires . . . . .   | 101        |
| 6.3       | Code informatique . . . . .   | 105        |
| 6.3.1     | Code analytique . . . . .   | 105        |
| 6.3.2     | Code numérique . . . . .  | 105        |
| 6.3.3     | Implémentation dans DIPHOX . . . . .  | 106        |
| 6.4       | Résultats numériques . . . . .  | 107        |
|           | Bibliographie . . . . .   | 110        |
|           | <b>Conclusion et Perspectives</b>   | <b>113</b> |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>A</b> | <b>Formulaire</b>   | <b>117</b> |
| A.1      | Algèbre de Dirac . . . . .  | 117        |
| A.2      | Facteurs de couleur . . . . .   | 118        |
| A.3      | Fonctions $\Gamma$ et $B$ . . . . .   | 119        |
| A.4      | Fonction $Li_2$ . . . . .   | 120        |
| <b>B</b> | <b>Éléments techniques</b>  | <b>121</b> |
| B.1      | Paramétrage de Feynman . . . . .  | 121        |
| B.2      | Calcul de $\bar{I}_{r,m}$ . . . . .   | 122        |
| <b>C</b> | <b>Intégrales à 3 points</b>  | <b>125</b> |
| <b>D</b> | <b>Intégrales à 4 points</b>  | <b>133</b> |
| <b>E</b> | <b>Intégrales à 5 points</b>  | <b>149</b> |
| <b>F</b> | <b>Towards automated one-loop calculations for multi-particle processes (article)</b> | <b>163</b> |
|          | Bibliographie . . . . .   | 176        |



# Introduction

De quoi le monde est-il fait ? Il s'agit là de l'une des questions fondamentales à laquelle l'humanité a longuement réfléchi, dans sa continuelle poursuite de la connaissance. La réponse à cette énigme va de la simple solution offerte par les anciennes écoles grecques de philosophie, qui proposaient que l'air, l'eau, le feu et la terre soient les éléments fondamentaux de la Nature, à des réponses plus complexes, et pourtant plus structurées, comme la table des éléments fournie par Mendeleev. Toutes les réponses, en dépit de leur variété, mettent en évidence notre quête pour décrire la Nature en utilisant des constituants fondamentaux et des interactions pour les lier.

De nos jours, une tentative de réponse à cette question combine la simplicité de l'ancien concept grec du monde à l'édifice quantitatif de Mendeleev. L'effort actuel et organisé des hommes nous a conduit à la physique des particules moderne et son fameux Modèle Standard, qui nous proposent aujourd'hui cette déclaration : le monde est constitué de quarks et de leptons. Ces constituants fondamentaux apparaissent en trois générations et ont une multitude de propriétés intrinsèques, telles que la masse, le spin, la charge, ou d'autres "nombres quantiques", comme on les appelle. L'interaction entre ces particules se manifeste sous quatre formes différentes : interactions électromagnétique, faible, forte et gravitationnelle, qui sont médiées par des porteurs de force. Bien que le Modèle Standard incorpore avec succès interactions électromagnétique, faible et forte dans une même théorie, la gravitation n'a pas encore pu y être incluse de manière consistante.

Toutes les particules élémentaires connues pour constituer la matière ont un spin  $1/2$ . On les appelle des fermions, et elles obéissent au principe d'exclusion de Pauli, qui dit qu'il ne peut exister qu'un seul fermion dans un état quantique donné. Au contraire, toutes les particules médiatrices des interactions ont des spins entiers et s'appellent bosons. A la différence des fermions, plusieurs bosons peuvent partager un même état et avoir donc les mêmes nombres quantiques. Ainsi, la propriété de spin fournit un moyen basique pour classer les parti-



cules. Les autres nombres quantiques des particules élémentaires décrivent leurs propriétés lorsqu'elles interagissent via les forces fondamentales : la charge électrique est la source de l'interaction électromagnétique, l'isospin faible est relié à l'interaction faible, la charge de couleur est la source de la force forte, et la masse détermine l'intensité de la force gravitationnelle (voir tableau 1).

| Interaction       | Intensité  | Portée<br>(m) | Médiateur       | Spin | Masse<br>(GeV/c <sup>2</sup> ) |
|-------------------|------------|---------------|-----------------|------|--------------------------------|
| Gravitationnelle  | $10^{-39}$ | $\infty$      | graviton ?      | 2    | 0                              |
| Faible            | $10^{-6}$  | $10^{-17}$    | $W^+, W^-, Z^0$ | 1    | 80.4, 80.4, 91.2               |
| Electromagnétique | $10^{-2}$  | $\infty$      | photon          | 1    | 0                              |
| Forte             | 1          | $10^{-15}$    | gluons          | 1    | 0                              |

TAB. 1 – Les quatre interactions fondamentales et leurs médiateurs.

Dans le Modèle Standard, la masse est générée par le mécanisme de Higgs. Ainsi, on s'attend à ce qu'une particule supplémentaire soit ajoutée à l'ensemble des particules élémentaires connues, le boson de Higgs. C'est l'interaction avec le champ de Higgs qui permet aux autres particules d'être massives, et pourtant le boson de Higgs n'a pas encore été observé.

Les interactions qui gouvernent les particules de matière, et donc implicitement leurs médiateurs, ont des propriétés relativement variées. L'interaction électromagnétique, qui se couple à la charge électrique des particules, a une portée infinie et est médiée par des photons sans masse. L'interaction faible, d'autre part, est portée par des bosons lourds, appelés  $W$  ou  $Z$ , et agit à de très faibles distances de l'ordre de  $10^{-17}$  mètres. Bien que les intensités de ces deux forces fondamentales soient différentes dans les processus de la Nature, la force faible étant près de 10000 fois plus faible que la force électromagnétique, les deux interactions ont pu être unifiées dans ce que l'on nomme la Théorie Electrofaible. L'intensité de l'interaction forte est 100 fois plus grande que celle de l'interaction électromagnétique, mais, à cause du confinement, sa portée reste limitée à  $10^{-15}$  mètres. Cette interaction agit sur le nombre quantique "couleur" des particules élémentaires et est médiée par des gluons, bosons non-massifs. La théorie qui décrit les interactions entre quarks et gluons est appelée Chromodynamique Quantique (du grec "khroma", couleur).

En plus des forces implémentées dans le Modèle Standard existe aussi la gravitation. A l'échelle de la physique des particules, la faible intensité de cette force ( $10^{-39}$  fois plus petite que la force forte) la rend insignifiante en comparaison des autres interactions et est donc négligée. On pense que son médiateur est une particule non-massive appelée graviton, et que la portée de cette force est infinie. Le but d'un grand nombre de physiciens de la physique des particules est d'incorporer toutes les interactions dans une même théorie d'unification.

Jusqu'à quel point ces constituants de la matière sont-ils fondamentaux ? Toutes les particules du Modèle Standard sont ponctuelles, et aucune structure n'a été observée jusqu'à des échelles aussi petites que  $10^{-18}$  mètres. Dans les collisionneurs de particules, qui sont en fait d'énormes microscopes permettant d'étudier la structure interne de la matière, a pris place dans les dernières décennies une course continue pour améliorer le pouvoir de résolution et pour étudier jusqu'à quel point les particules sont élémentaires.

Pour compléter cette vision, il est nécessaire d'introduire une image miroir contenant les antiparticules. Pour chaque particule existe une antiparticule, qui a la même masse et le même spin, mais des valeurs opposées de la charge électrique, de l'isospin faible et de la couleur. Ces antiparticules sont soumises aux mêmes interactions fondamentales et avec la même intensité que leurs particules de matière partenaires.

Dans le Modèle Standard, les particules sont représentées par des champs. On décrit la propagation des particules dans l'espace-temps et leurs interactions à partir de ces champs par un lagrangien. On demande alors à ce lagrangien de respecter certaines symétries observées dans la Nature. En exigeant l'invariance du lagrangien sous la symétrie de jauge, apparaissent des champs de jauge, qui correspondent aux bosons médiateurs des interactions. Une telle théorie est appelée théorie de jauge.

L'ensemble des opérations de symétrie de jauge qui laissent invariant le lagrangien du Modèle Standard forme le groupe :

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$$

Le groupe de symétrie locale  $SU(2) \times U(1)$  correspond aux interactions électrofaibles. Il admet quatre générateurs, et les interactions sont donc transmises par quatre bosons :  $\gamma$ ,  $Z^0$ ,  $W^+$  et  $W^-$ . Les expériences ont montré que les trois derniers bosons sont massifs, ce qui a soulevé un problème important, puisque cette masse n'est pas compatible avec la symétrie  $SU(2) \times U(1)$ . Une solution au problème a été trouvée dans le mécanisme de Higgs, qui brise spontanément la symétrie de jauge, et qui introduit une particule scalaire, le boson de Higgs.

Le groupe  $SU(3)$  correspond à la Chromodynamique Quantique qui décrit les interactions fortes. Ce groupe admet huit générateurs, et l'interaction forte est donc médiée par huit gluons.

Les différentes questions soulevées par le Modèle Standard – en particulier, l'existence du boson de Higgs – nécessitent des études expérimentales plus poussées. C'est pour cette raison qu'une nouvelle génération de collisionneurs hadroniques à très haute énergie, tels que le futur LHC (Large Hadron Collider), qui est un collisionneur proton-proton au CERN, va bientôt entrer en service. Ils auront d'importantes capacités pour rechercher de nouvelles particules. Comme ils font intervenir directement les interactions fortes, il est nécessaire de bien maîtriser les prédictions de la Chromodynamique Quantique.

Les prédictions théoriques de la Chromodynamique Quantique, destinées à une confron-

tation avec les résultats expérimentaux, reposent sur le calcul perturbatif de diagrammes de Feynman à l'aide des propriétés générales de la théorie. Le calcul à l'ordre dominant est aisé, mais ne fournit pas la précision nécessaire à de telles énergies. Le calcul des ordres supérieurs est extrêmement compliqué.

Quand une nouvelle particule sera découverte, il sera nécessaire d'en étudier les caractéristiques (masse, couplage...), de manière à contraindre les paramètres des différents modèles. Pour cette raison, de nombreux canaux devront être analysés, et spécialement ceux qui conduisent à plusieurs particules dans l'état final.

Pour effectuer des calculs d'ordres supérieurs, il faut considérer les sections efficaces de tous les sous-processus partoniques qui contribuent à la réaction étudiée, tout d'abord au premier ordre, puis les corrections réelles et virtuelles (à une boucle) à ces sections efficaces. A l'ordre d'une boucle, il est nécessaire de combiner les corrections réelles et virtuelles et de compenser les divergences infrarouges. Le calcul des corrections réelles est relativement simple, contrairement aux corrections virtuelles qui sont particulièrement difficiles à calculer si le nombre de particules externes est supérieur à quatre, ou si les particules sont massives. Par conséquent, il serait très utile de mettre au point un programme automatique capable de calculer les amplitudes virtuelles.

Le but de cette thèse est la mise au point de méthodes et d'outils pouvant être utilisés dans un tel code automatique. Ce manuscrit comporte deux parties principales.

La première partie consiste en des rappels théoriques et techniques. Nous y décrirons succinctement la théorie de la Chromodynamique Quantique perturbative, ainsi que des méthodes et éléments de calculs que nous utiliserons dans la suite.

Dans une deuxième partie, nous nous intéresserons au calcul des processus multiparticules. Ce genre de calculs fait intervenir des intégrales de boucle souvent très difficiles à calculer. Aussi, nous développerons tout d'abord des méthodes de réduction des intégrales qui permettront un calcul plus aisé de ces intégrales. Ensuite, après avoir étudié l'exemple du processus  $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$ , nous considérerons le calcul plus compliqué de l'amplitude de  $gg \rightarrow \gamma\gamma g$ . L'intérêt de cette réaction est double. D'une part, de par sa complexité, elle va nous permettre de mettre au point un code analytique qui pourra être réutilisé pour le calcul d'autres amplitudes, en particulier des amplitudes contenant des particules massives. Cette amplitude a pu être extraite de la réaction  $gg \rightarrow ggg$ , ce qui nous permettra de vérifier les résultats obtenus. D'autre part, cette réaction participe au bruit de fond de la recherche du Higgs, et les prédictions phénoménologiques intéressent les expérimentateurs des détecteurs ATLAS et CMS du LHC. Les résultats seront alors explicitement présentés sous une représentation qui met en évidence l'invariance de jauge. Nous terminerons par l'étude phénoménologique de cette réaction.

En annexe sera également détaillé le calcul des intégrales à quatre et cinq points, ainsi que les résultats des intégrales à trois points.

Première partie

Rappels théoriques et techniques



---

# Chapitre 1

## QCD perturbative

---

Dans ce chapitre, nous allons évoquer brièvement quelques aspects de la QCD perturbative. La littérature traitant de ce sujet étant très riche, j'aborderai ici seulement quelques généralités sur la théorie, en particulier le lagrangien de la QCD, le problème des divergences et le modèle des partons. Pour des descriptions plus complètes, on peut se reporter aux revues [1–8].

### 1.1 Généralités

La Chromodynamique Quantique (QCD) est la théorie qui traite de l'interaction forte. Les particules soumises à cette interaction sont appelées hadrons. L'idée de base de la QCD est que les hadrons ne sont pas des objets fondamentaux, mais sont en fait des états liés de quarks, particules de spin  $1/2$  qui peuvent se présenter sous trois saveurs différentes. Sous une telle hypothèse, les hadrons peuvent apparaître comme des états symétriques de spin et de saveur. Cependant, les fermions obéissent à la statistique de Fermi–Dirac, et devraient donc être des états antisymétriques. Pour résoudre ce dilemme, une nouvelle charge quantique, la couleur, a été introduite.

L'interaction de couleur entre un quark  $q$  et un anti-quark  $\bar{q}$  est transmise par des particules de jauge, les gluons. A la différence des photons en électromagnétisme, les gluons ont eux-même une charge de couleur et peuvent donc auto-interagir, ce qui rend possibles les vertex à trois ou quatre gluons. Cette particularité illustre le fait que la QCD est une théorie des champs non-abélienne.

Chaque saveur de quarks apparaît sous trois couleurs. La symétrie de jauge locale la plus

simple à considérer est donc  $SU(3)$ . Il s'agit en fait d'une symétrie exacte, et par conséquent les gluons sont non-massifs. La couleur est échangée via huit gluons colorés.

Les hadrons n'ont pas de couleur, et on peut en distinguer deux types. Ainsi, les mésons (bosons) sont formés d'un quark et d'un anti-quark de couleurs opposées, tandis que les baryons (fermions) contiennent trois quarks de couleurs complémentaires.

La “constante” de couplage  $\alpha_s$  de la QCD varie avec l'énergie. Si la distance entre deux quarks augmente, cette constante de couplage augmente fortement, si bien qu'il est impossible de séparer deux quarks. Ainsi, toute tentative pour isoler un quark aboutit à la création de hadrons supplémentaires (c'est le confinement).

A l'inverse, à faible distance apparaît la liberté asymptotique ( $\alpha_s \ll 1$ ) : les quarks se comportent comme des particules ponctuelles quasi-libres qui n'interagissent pas.

Lorsque  $\alpha_s$  est petit (à haute énergie), il est alors possible d'utiliser la théorie des perturbations et d'écrire les sections efficaces des réactions  $\sigma$  sous la forme :

$$\sigma = A_0 + A_1\alpha_s + A_2\alpha_s^2 + \dots \quad , \quad (1.1)$$

où les  $A_i$  sont des coefficients à calculer pour chaque ordre du calcul perturbatif de la réaction considérée.

## 1.2 Le Lagrangien de la QCD

La Chromodynamique Quantique est définie, en tant que théorie des champs, par sa densité lagrangienne :

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \mathcal{L}_{\text{matière}} + \mathcal{L}_{\text{YM}} + \mathcal{L}_{\text{jauge}} + \mathcal{L}_{\text{fantôme}} + \mathcal{L}_{\bar{\theta}} \quad . \quad (1.2)$$

Les deux premiers termes du lagrangien en constituent la partie classique et invariante sous les transformations de jauge locale de  $SU(3)$ <sup>1</sup>.

La partie “matière” peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{L}_{\text{matière}} = \sum_{f=1}^{n_f} \bar{\psi}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) \psi_f \quad , \quad (1.3)$$

où  $\psi_f$  est le champ de Dirac,  $f$  un indice qui représente les différentes saveurs des quarks,  $n_f$  le nombre de saveurs,  $\gamma^\mu$  les matrices de Dirac et  $m_f$  la masse des quarks. Ainsi, les

---

<sup>1</sup>3 est le nombre de couleurs. Plus généralement, le groupe est noté  $SU(N_c)$ , où  $N_c$  est le nombre de couleurs de la théorie. Il y aura donc  $N_c^2 - 1$  (soit 8) générateurs du groupe, notés  $T^a$ , avec  $a = 1 \cdots N_c^2 - 1$  (qui satisfont l'équation (1.5)).

quarks ne sont distincts dans le lagrangien de la QCD que par leurs masses. La dérivée covariante  $D$  est donnée par

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s A_\mu^a T^a , \quad (1.4)$$

où  $g_s$  est le couplage fort,  $A$  le champ vectoriel de jauge du gluon,  $a = 1, 2, \dots, 8$  ses huit composantes, et  $T$  la matrice de couleur qui satisfait la relation :

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c , \quad (1.5)$$

définissant ainsi l'algèbre de Lie de  $SU(3)$  [9].  $f^{abc}$  est la constante de structure du groupe, antisymétrique par permutation des indices.

Sous une transformation de jauge de couleurs, le champ de Dirac devient

$$\psi'_f(x) = U(x) \psi_f(x) , \quad (1.6)$$

avec

$$U(x) = \exp \left\{ i \sum_{a=1}^8 \beta^a(x) T^a \right\} , \quad (1.7)$$

où les  $\beta^a(x)$  sont des réels. Le champ de gluon doit donc suivre la loi de transformation :

$$A'_\mu(x) = U(x) A_\mu(x) U^{-1}(x) + \frac{i}{g_s} [\partial_\mu U(x)] U^{-1}(x) . \quad (1.8)$$

On pourra vérifier que ces règles de transformation respectent bien l'invariance de jauge.

Le deuxième terme du lagrangien (1.2) est le terme de Yang et Mills. Il décrit la dynamique des gluons, et prend la forme :

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4} F^2 = -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^8 F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu,a} , \quad (1.9)$$

où l'on a introduit le tenseur :

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c . \quad (1.10)$$

Le dernier terme est imposé par l'invariance de jauge et est responsable de l'auto-interaction des gluons.

L'étape suivante consiste à quantifier le champ des quarks et gluons. La procédure de quantification n'est pas unique et plusieurs méthodes (que nous ne décrirons pas ici) existent [10]. Cette quantification du lagrangien classique est rendue difficile à cause de l'invariance de jauge. C'est pourquoi on ajoute au lagrangien les termes de fixation de jauge  $\mathcal{L}_{\text{jauge}}$  et de fantôme  $\mathcal{L}_{\text{fantôme}}$  tels que :

$$\mathcal{L}_{\text{jauge}} = -\frac{1}{2\xi} \sum_{a=1}^8 (\partial_\mu A^{\mu,a})^2 , \quad (1.11)$$



et

$$\mathcal{L}_{\text{fantôme}} = (\partial_\mu \bar{c}_a)(\delta^{ac} \partial^\mu - g_s f^{abc} A^{\mu,b}) c_c, \quad (1.12)$$

qui sont les choix les plus communs. Les résultats physiques ne dépendent pas de la manière de fixer la jauge. Le terme de fantôme est aussi appelé terme de Fadeev–Popov, et il assure l’unitarité en compensant les effets des polarisations non–physiques [11].  $\xi$  est le paramètre de fixation de jauge, et  $c$  et  $\bar{c}$  sont les champs de fantômes et d’anti-fantômes. Ces champs scalaires ne correspondent pas à des particules physiques, mais sont des champs virtuels qui vont permettre les calculs perturbatifs.

Il faut mentionner aussi qu’en fixant la jauge, on brise l’invariance de jauge du lagrangien. Cependant, même après ce choix de jauge, le lagrangien respecte une autre symétrie, la symétrie BRST [12], qui apparaît comme un reste de la symétrie de jauge initiale.

Enfin, on peut mentionner l’existence du terme  $\mathcal{L}_{\bar{\theta}}$ , qui peut s’écrire sous la forme :

$$\mathcal{L}_{\bar{\theta}} = \bar{\Theta} \frac{g^2}{32\pi^2} F_{\mu\nu}^a \tilde{F}^{a\mu\nu}, \quad (1.13)$$

où  $\tilde{F}^{a\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} F_{\lambda\rho}^a$  est le dual de  $F_{\mu\nu}^a$ . Ce terme est un terme effectif qui provient d’une part des propriétés topologiques du vide des théories de jauge non-abéliennes, et d’autre part du processus de diagonalisation de la matrice de masse des quarks. Il n’intervient pas dans les calculs perturbatifs, car il peut s’écrire comme la divergence d’un courant, et donc comme un terme de surface dans l’action. Pour plus de détails, on pourra se reporter à [13].

### 1.3 Règles de Feynman

Les règles de Feynman associées aux différents termes du lagrangien de la QCD sont données ci-après.

- ligne fermionique entrante

$$\begin{array}{c} \text{---} \blacktriangleright \text{---} \bullet \\ \text{p} \end{array} \quad u(p) \quad (1.14)$$

- ligne anti-fermionique entrante

$$\begin{array}{c} \text{---} \blacktriangleright \text{---} \bullet \\ \text{p} \end{array} \quad \bar{v}(p) \quad (1.15)$$

- ligne fermionique sortante

$$\bullet \longrightarrow \text{p} \quad \bar{u}(p) \quad (1.16)$$

- ligne anti-fermionique sortante

$$\bullet \longrightarrow \text{p} \quad v(p) \quad (1.17)$$

- propagateur fermionique

$$\text{i} \bullet \longrightarrow \text{p} \bullet \text{j} \quad \frac{i \delta^{ij}}{\not{p} - m + i \lambda} \quad (1.18)$$

- ligne gluonique entrante

$$\text{a} \quad \overrightarrow{\text{~~~~~}} \bullet \quad \epsilon_a(k) \quad (1.19)$$

- ligne gluonique sortante

$$\bullet \quad \overrightarrow{\text{~~~~~}} \text{a} \quad \epsilon_a^*(k) \quad (1.20)$$

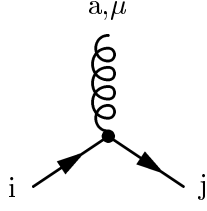
- propagateur du gluon

$$\text{a}, \mu \bullet \text{~~~~~} \bullet \text{b}, \nu \quad \frac{-i \delta^{ab}}{k^2 + i \lambda} \left( g^{\mu \nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 + i \lambda} \right) \quad (1.21)$$

- propagateur du fantôme

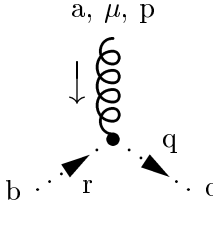
$$\text{a} \bullet \cdots \bullet \text{p} \cdots \bullet \text{b} \quad \frac{i \delta^{ab}}{p^2 + i \lambda} \quad (1.22)$$

- vertex fermion-fermion-gluon



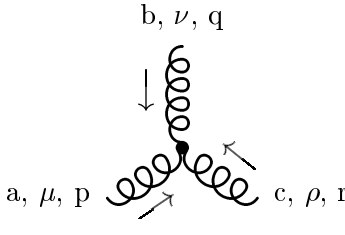
$$-i g (T^a)_{ji} \gamma^\mu \quad (1.23)$$

- vertex fantôme-fantôme-gluon



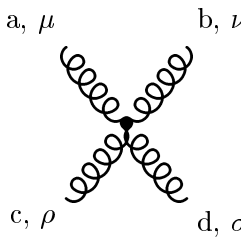
$$g f^{abc} q^\mu \quad (q = p - r) \quad (1.24)$$

- vertex gluon-gluon-gluon



$$-g f^{abc} [g^{\mu\nu} (p - q)^\rho + g^{\nu\rho} (q - r)^\mu + g^{\rho\mu} (r - p)^\nu] \quad (p + q + r = 0) \quad (1.25)$$

- vertex gluon-gluon-gluon-gluon



$$\begin{aligned} & -ig^2 f^{eac} f^{ebd} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\ & -ig^2 f^{ead} f^{ebc} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) \\ & -ig^2 f^{eab} f^{ecd} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \end{aligned} \quad (1.26)$$

## 1.4 Les divergences et la renormalisation

Lors de calculs perturbatifs, on rencontre inévitablement des divergences dans les intégrales de boucles. Celles-ci proviennent habituellement du comportement aux grandes impulsions de ces intégrales, et sont donc appelées divergences ultraviolettes (UV). Ces divergences peuvent être éliminées en ajoutant des contre-terme au lagrangien.

On peut aussi voir apparaître des divergences infrarouges (IR) ou colinéaires provenant du comportement des intégrales à faible énergie (ces intégrales tiennent compte de la région où le gluon virtuel devient mou dans le cas des divergences infrarouges, et de la région dans laquelle l'impulsion du gluon est parallèle à celle du quark qui l'a émis, dans le cas des divergences colinéaires). D'après le théorème de Lee–Kinoshita–Nauenberg [14, 15], ces divergences se compensent entre les diagrammes réels et virtuels.

En redéfinissant de manière appropriée la normalisation des champs, les paramètres de masse et les constantes de couplage du lagrangien, il est possible d'absorber les divergences UV, autrement dit, de renormaliser. Mais avant de renormaliser, il est nécessaire d'isoler ces divergences pour leur donner un sens mathématique, et de travailler avec des quantités finies : c'est la régularisation. Plusieurs méthodes de régularisation existent, et on va plus particulièrement s'intéresser à la "régularisation dimensionnelle" [16]. Dans cette méthode, on va modifier la dimension de l'espace-temps, et travailler en  $n = 4 \pm 2\varepsilon$  dimensions ( $n = 4 + 2\varepsilon$  pour des divergences IR et  $n = 4 - 2\varepsilon$  pour des divergences UV, avec  $\varepsilon > 0$ ), de manière à retrouver l'espace-temps à 4 dimensions pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  (voir section (2.3)). Les divergences vont ainsi se manifester sous la forme de pôles en  $1/\varepsilon^p$ . Le grand avantage de la régularisation dimensionnelle est qu'elle respecte l'invariance de la théorie sous les translations et sous les transformations de jauge. C'est cette méthode que nous utiliserons dans la suite.

Puisqu'on veut travailler directement avec les quantités renormalisées, on va chercher à remplacer les paramètres existants (dits "nus") par leurs équivalents renormalisés (indiqués dans la suite avec  $R$ ), en écrivant le lagrangien sous la forme d'une partie qui contient tous les paramètres renormalisés, et d'une partie correspondant à des contre-terme [17]. Le lagrangien de la QCD s'écrit donc :

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \mathcal{L}_{\text{QCD}}^R + \mathcal{L}_{\text{contre-terme}} \quad , \quad (1.27)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{contre-terme}} = & (Z_2 - 1)\bar{\psi}_R i \not{\partial} \psi_R - (Z_2 Z_m - 1)m_R \bar{\psi}_R \psi_R \\ & + \frac{1}{2}(Z_3 - 1)A_{\mu R}^a \delta^{ab} [g^{\mu\nu} \partial^\lambda \partial_\lambda - \partial_\mu \partial_\nu] A_{\nu R}^b - (\tilde{Z}_3 - 1)\bar{c}_R^a \delta^{ab} \partial^\lambda \partial_\lambda c_R^b \\ & - (Z_{1F} - 1)g_{sR} \bar{\psi}_R \gamma^\mu T^a \psi_R A_{\mu R}^a - (Z_1 - 1)\frac{1}{2}g_{sR} f^{abc} (\partial_\mu A_{\nu R}^a - \partial_\nu A_{\mu R}^a) A_{\mu R}^b A_{\nu R}^c \\ & - (Z_4 - 1)\frac{1}{4}g_{sR}^2 f^{abc} f^{ade} A_{\mu R}^b A_{\nu R}^c A_R^{d\mu} A_R^{e\nu} + (\tilde{Z}_1 - 1)g_{sR} f^{abc} \bar{c}_R^a \partial_\mu (A_{\mu R}^b c_R^c) \quad , \end{aligned} \quad (1.28)$$

et où les  $Z$  sont des constantes multiplicatives telles que :

$$\begin{aligned}
 \psi &= \sqrt{Z_2} \psi_R & A^\mu &= \sqrt{Z_3} A_R^\mu \\
 c &= \sqrt{\tilde{Z}_3} c_R & g_s &= Z_g g_{sR} \\
 \xi &= Z_3 \xi_R & m &= Z_m m_R \\
 Z_1 &= Z_g Z_3^{3/2} & Z_{1F} &= Z_g Z_2 Z_3^{1/2} \\
 \tilde{Z}_1 &= Z_g \tilde{Z}_3 Z_3^{1/2} & Z_4 &= Z_g^2 Z_3^2 .
 \end{aligned}$$

On a comme contrainte la conservation de l'invariance de jauge (identités de Slavnov-Taylor) :

$$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3} = \frac{Z_{1F}}{Z_2} = \frac{Z_4}{Z_1} . \quad (1.29)$$

On peut choisir les  $Z_i$  de manière à compenser les divergences. Ce choix détermine le schéma de renormalisation [17]. Le schéma de renormalisation le plus commun pour les calculs de QCD est le schéma de “soustraction minimale modifiée” ( $\overline{\text{MS}}$ ) [18]. Il s'agit d'un schéma relativement simple qui consiste à soustraire les pôles en  $1/\varepsilon$ , ainsi qu'éventuellement certaines constantes provenant de la manière de régulariser les divergences.

Même si la forme des calculs et des expressions dépend du schéma choisi, les prédictions physiques ne doivent au contraire pas en dépendre. Cette contrainte se traduit dans les “équations du groupe de renormalisation” [19].

#### 1.4.1 Constante de couplage $\alpha_s$ et liberté asymptotique

Comme on vient de le voir, les sections efficaces physiques ne doivent pas dépendre du choix du schéma de renormalisation :

$$\mu^2 \frac{d\sigma(\mu^2, \alpha_s)}{d(\mu^2)} = 0 , \quad (1.30)$$

mais la section efficace dépend cependant de  $\alpha_s$ , donc :

$$\mu^2 \frac{d\sigma(\mu^2, \alpha_s)}{d(\mu^2)} = \left( \mu^2 \frac{\partial}{\partial(\mu^2)} + \mu^2 \frac{d\alpha_s}{d(\mu^2)} \frac{\partial}{\partial\alpha_s} \right) \sigma(\mu^2, \alpha_s) \quad (1.31)$$

$$= \left( \mu^2 \frac{\partial}{\partial(\mu^2)} + \beta(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial\alpha_s} \right) \sigma(\mu^2, \alpha_s) = 0 , \quad (1.32)$$

avec :

$$\mu^2 \frac{d\alpha_s(\mu^2)}{d(\mu^2)} = \beta(\alpha_s) . \quad (1.33)$$

En QCD perturbative, la fonction  $\beta$  peut s'écrire comme un développement en puissances du couplage fort :

$$\beta(\alpha_s) = -B\alpha_s^2(\mu^2)(1 + B_1\alpha_s + B_2\alpha_s^2 + \dots) , \quad (1.34)$$

avec, en particulier,  $B = (11 - 2n_f/3)/(4\pi)$ ,  $n_f$  étant le nombre de saveurs de quarks pouvant participer à l'interaction, compte tenu de la valeur de  $\mu^2$ . On peut remarquer que pour  $n_f < 17$ ,  $B$  est positif, et par conséquent  $\alpha_s$  va décroître lorsque  $\mu^2$  augmente.

Au premier ordre, l'équation (1.33) peut s'écrire :

$$\frac{d}{d(\ln \mu^2)}(1/\alpha_s(\mu^2)) = B . \quad (1.35)$$

On en déduit la solution :

$$\frac{1}{\alpha_s(Q^2)} - \frac{1}{\alpha_s(\mu^2)} = B \ln (Q^2/\mu^2) , \quad (1.36)$$

où  $Q^2$  représente la valeur de référence de  $\mu^2$ , ce qui signifie que si l'on connaît  $\alpha_s$  à une certaine échelle, il va être possible de l'obtenir à d'autres échelles aussi. On peut donc écrire :

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + B\alpha_s(\mu^2) \ln (Q^2/\mu^2)} , \quad (1.37)$$

ou encore, en divisant par  $\alpha_s(\mu^2)$  et en posant  $1/\alpha_s(\mu^2) \equiv B \ln (\mu^2/\Lambda^2)$  :

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{1}{B \ln (Q^2/\Lambda^2)} . \quad (1.38)$$

La constante  $\Lambda$ , qui fixe le taux de variation de  $\alpha_s$ , est indépendante de la référence arbitraire  $Q^2$ . Elle donne une estimation de l'énergie à laquelle le couplage devient grand et où la théorie perturbative échoue. Les données suggèrent que  $\Lambda \approx 0.2$  GeV (pour  $n_f = 6$ ). Pour être sûr que la théorie perturbative est valide, il faut donc choisir une échelle plus élevée que cette valeur. L'échelle habituellement choisie pour la QCD perturbative, appelée  $M_0$ , est de l'ordre de 1 GeV.

On peut s'apercevoir des propriétés de la liberté asymptotique à partir de la variation de la constante de couplage. En effet, l'équation (1.38) montre que  $\alpha_s$  décroît avec l'énergie. Cela signifie d'une part que pour des diffusions à hautes énergies, où le moment transféré est important, les quarks et les gluons se comportent comme des particules quasi-libres, et d'autre part que, puisque  $\alpha_s$  est petit, la théorie perturbative est valide.

### 1.4.2 Comptage de puissance

Le comptage de puissance est une méthode simple qui permet de déterminer le comportement des divergences ultra-violettes d'un diagramme de Feynman [13].

Comme nous l'avons vu dans ce chapitre, les divergences ultra-violettes apparaissent dans des diagrammes avec boucle. Examinons le cas d'un diagramme  $D$  qui comporte  $E_F$  lignes externes et  $I_F$  lignes internes de fermions, et  $E_B$  lignes externes et  $I_B$  lignes internes de bosons. On considérera uniquement le cas où les fermions ont un spin 1/2 et les bosons un spin 0 ou 1.  $D$  peut contenir des vertex de types différents. Soit  $n_i$  le nombre de vertex de type  $i$  associés à la constante de couplage  $g_i$ . Le nombre total de vertex est alors donné simplement par :

$$N = \sum_i n_i . \quad (1.39)$$

Le nombre de boucles correspond au nombre de variables d'intégration indépendantes, et est donné par :

$$L = I_B + I_F - (N - 1) . \quad (1.40)$$

$L$  est donc le nombre d'impulsions de  $D$  qui ne sont pas fixées par la conservation de l'énergie impulsion. Le degré de divergence superficielle est donné par :

$$\omega(D) = 4 - \frac{3}{2}E_F - E_B - \sum_i \dim(g_i)n_i , \quad (1.41)$$

où  $\dim(g_i)$  dénote la dimension de la constante de couplage  $g_i$ . L'intégrale sur les impulsions tournant à l'intérieur des boucles est alors divergente si  $\omega(D) \geq 0$ .

Dans le cas de la QCD et de la QED, les constantes de couplage sont sans dimension, si bien que le degré de divergence superficielle peut s'écrire :

$$\omega(D) = 4 - \frac{3}{2}E_F - E_B . \quad (1.42)$$

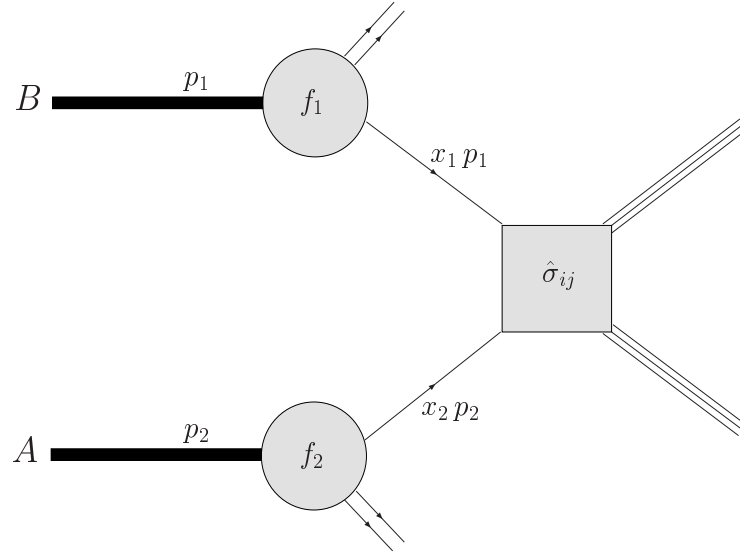
Ce qui signifie qu'il existe un nombre fini de fonctions de Green superficiellement divergentes et qu'il est possible de renormaliser la théorie.

## 1.5 Modèle des partons

La diffusion profondément inélastique a permis de mettre en évidence l'existence de constituants ponctuels à l'intérieur des hadrons [20]. On appelle ces constituants des partons, un terme qui englobe aussi bien les quarks que les gluons.

On peut calculer la section efficace des réactions faisant intervenir des partons. Mais on s'intéresse en réalité aux réactions hadroniques, qui contrairement aux réactions partoniques sont directement observables expérimentalement, et l'enjeu du modèle des partons est donc de relier les sections efficaces hadroniques aux sections efficaces partoniques. Pour ce faire, on utilise le procédé de "factorisation" qui consiste à séparer (ou factoriser) les contributions perturbatives et non perturbatives pour des réactions avec grands moments transférés.

Considérons la collision de deux hadrons A et B :



A très haute énergie, on néglige la masse des hadrons et on suppose que tous les partons initiaux (entrant dans la diffusion) emportent un moment  $x p$ , c'est-à-dire une fraction  $x$  du moment  $p$  du hadron parent<sup>2</sup>.

La section efficace hadronique s'écrit alors comme une convolution des distributions partoniques de chaque hadron avec la section efficace de diffusion de deux partons, de la manière suivante :

$$\sigma(A, B) = \sum_{i,j} \int dx_1 dx_2 f_i(x_1, \mu_F^2) f_j(x_2, \mu_F^2) \hat{\sigma}_{ij}(p_1, p_2, \mu_F^2) . \quad (1.43)$$

Ainsi,  $\hat{\sigma}_{ij}$  est la section efficace de la diffusion de deux partons  $i$  et  $j$ , et  $f_i$  est la densité de probabilité de trouver le parton  $i$  (qui emporte le moment  $x p$ ) dans le hadron. On appelle cette densité de probabilité, "densité partonique" du parton  $i$  dans le hadron. Ces densités ont un caractère universel et décrivent la physique à longue distance (échelle d'énergie inférieure à  $M_0$ ). Elles ne sont donc pas calculables perturbativement, mais peuvent néanmoins être obtenues expérimentalement. Au contraire,  $\hat{\sigma}_{ij}$  décrit la physique à courte distance (échelle d'énergie supérieure à  $M_0$ ) et peut donc être calculée par des méthodes perturbatives. Il s'agit là du procédé de factorisation précédemment mentionné. Le paramètre  $\mu_F$  présent dans les densités partoniques apparaît alors comme une échelle de factorisation. En règle générale, on choisit un facteur d'échelle unique pour la renormalisation et la factorisation, et sa valeur est généralement prise égale à  $Q^2$ , qui est l'énergie qui caractérise la diffusion parton-parton dure.

---

<sup>2</sup>Il s'agit là d'une hypothèse qui n'est pas toujours réaliste. Il est cependant possible de lui apporter des corrections (voir par exemple [21] pour le cas des petits  $x$ ).



La section efficace  $\hat{\sigma}_{ij}$  peut être développée en série perturbative :

$$\hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \frac{\alpha_s}{2\pi} \sigma_{ij}^{(1)} + \left(\frac{\alpha_s}{2\pi}\right)^2 \sigma_{ij}^{(2)} + \dots \quad (1.44)$$

L'ordre (0) est appelé ordre de Born ou de l'arbre.

Les densités partoniques ont un caractère universel, et ne dépendent pas des réactions. Même si la QCD perturbative ne permet pas de calculer leur amplitude et leur forme, on peut néanmoins prédire leur évolution en fonction de  $Q^2$ . Ainsi, si l'on connaît ces fonctions à une échelle donnée, il est possible de les utiliser à d'autres échelles.

L'équation d'évolution des densités partoniques, appelée équation DGLAP (Dokshitzer, Gribov, Lipatov, Altarelli, Parisi) [22], décrit l'évolution de la distribution des quarks et des gluons dans les hadrons.

Considérons  $f_q(x, Q^2)$  la densité de quarks ou d'antiquarks dans le hadron, et  $f_g(x, Q^2) \equiv g(x, Q^2)$  celle de gluons. On peut alors écrire au premier ordre :

$$\frac{df_q(x, Q^2)}{d \ln Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[ P_{qq}\left(\frac{x}{y}\right) f_q(y, Q^2) + P_{qg}\left(\frac{x}{y}\right) g(y, Q^2) \right] , \quad (1.45)$$

pour chaque saveur de quark. Le premier terme qui apparaît dans l'intégrale exprime le fait qu'un quark emportant une fraction d'impulsion  $x$  peut avoir été produit par un quark de plus grande fraction d'impulsion  $y$  ayant rayonné un gluon. Le second terme résulte de la possibilité qu'un quark de fraction d'impulsion  $x$  puisse provenir d'un gluon parent de plus grande fraction d'impulsion  $y$ . La probabilité de chaque événement est proportionnelle aux noyaux d'Altarelli–Parisi ( $\alpha_s P_{ab}$ ).

De même, l'évolution de la densité de gluons s'écrit :

$$\frac{dg(x, Q^2)}{d \ln Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \sum_q \left[ P_{gq}\left(\frac{x}{y}\right) f_q(y, Q^2) + P_{gg}\left(\frac{x}{y}\right) g(y, Q^2) \right] , \quad (1.46)$$

où l'on somme sur  $q$ , c'est-à-dire sur les quarks et les antiquarks de toutes les saveurs.

La fonction de partition  $P_{ab}$  est, à l'instar de  $\hat{\sigma}_{ij}$ , calculable en QCD perturbative :

$$P_{ab}(z, \alpha_s) = P_{ab}^{(0)}(z) + \frac{\alpha_s}{2\pi} P_{ab}^{(1)}(z) + \dots \quad (1.47)$$

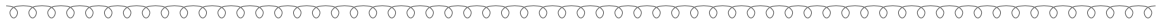
Dans le cas où il n'y a pas de divergence infrarouge ou colinéaire,  $P_{ab}$  peut être interprétée comme la probabilité de produire un parton du type  $a$  à partir d'un parton du type  $b$  avec une fraction  $z$  de son moment longitudinal et un moment transverse bien inférieur à  $\mu^2$ .

L'ordre (0) dans les équations (1.44) et (1.47) correspond au “leading order” (LO), l'ordre (1) au “next to leading order” (NLO) et l'ordre (2) au “next to next to leading order” (NNLO), et ainsi de suite.

---

Dans cette thèse, nous allons nous intéresser au calcul perturbatif de sections efficaces partoniques. Les sections efficaces hadroniques peuvent ensuite être retrouvées à l'aide du modèle des partons.

Après cette rapide description de la QCD perturbative, nous allons nous intéresser aux différents outils et méthodes nécessaires au calcul perturbatif de sections efficaces de réactions.



---

# Bibliographie

- [1] F. Halzen et A.D. Martin, “Quarks & Leptons : An Introductory Course In Modern Particle Physics”, John Wiley & Sons (1984), ISBN 0-471-88741-2.
- [2] G. Altarelli, “A QCD Primer”, CERN-TH-2002-022, hep-ph/0204179.
- [3] T. Muta, “Foundation of QCD : an introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories”, World Scientific, Singapour (1987), ISBN 9971-950-40-5.
- [4] S. Pokorski, “Gauge Field Theories”, Cambridge University Press (2000), ISBN 0-521-47816-2.
- [5] Y.L. Dokshitzer, V.A. Khoze, A.H. Mueller et S.I. Troyan, “Basics of Perturbative QCD”, Editions Frontières (1991), ISBN 2-86332-101-3.
- [6] F. Lenz et al. (éd.), “Lectures on QCD”, Springer (1997), ISBN 3-540-63442-8.
- [7] CTEQ Collaboration (Raymond Brock et al.), “Handbook of Perturbative QCD”, Rev. Mod. Phys. 67 (1995), 157.
- [8] E. Pilon, “Quelques éléments de Chromodynamique”, Cours de Gif 1995.
- [9] H. Fritzsch, M. Gell-Mann et H. Leutwyler, “Advantages of the color octet gluon picture”, Phys. Lett. B 47 (1973), 365.
- [10] R. P. Feynman, “Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics”, Rev. Mod. Phys. 20 (1948), 367.
- [11] R.K. Ellis, “An Introduction to the QCD Parton Model”, FERMILAB-CONF-88/60-T (1988).
- [12] C. Becchi, A. Rouet et R. Stora, “The abelian Higgs-Kibble model. Unitarity of the S operator”, Phys. Lett. B 52 (1974), 344.  
C. Becchi, A. Rouet et R. Stora, “Renormalization of the abelian Higgs-Kibble model”, Commun. Math. Phys. 42 (1975), 127.

- 
- [13] T.-P. Cheng et L.-F. Li, “Gauge theory of elementary particle physics”, Oxford University Press, Oxford (1984), ISBN 0-19-851956-7.
- [14] T. Kinoshita, “Mass singularities of Feynman amplitudes”, J. Math. Phys. 3 (1962), 650.
- [15] T.D. Lee et M. Nauenberg, “Degenerate Systems and Mass Singularities”, Phys. Rev. 133 (1964), B 1549.
- [16] G. t’Hooft et M.J.G. Veltman, “Regularization and renormalization of gauge fields”, Nucl. Phys. B 44 (1972), 189.
- [17] J. Collins, “Renormalisation”, Cambridge Monographs in Mathematical Physics (1984), ISBN 0-521-31177-2.
- [18] W.A. Bardeen, A.J. Buras, D.W. Duke et T. Muta, “Deep-inelastic scattering beyond the leading order in asymptotically free gauge theories”, Phys. Rev. D 18 (1978), 3998.
- [19] M. Gell-Mann et F.E. Low, “Quantum Electrodynamics at small distances”, Phys. Rev. 95 (1954), 1300.
- [20] E. D. Bloom et al., “High-Energy Inelastic e-p Scattering at 6Å and 10Å”, Phys. Rev. Lett. 23 (1969), 930.  
M. Breidenbach et al., “Observed Behavior of Highly Inelastic Electron-Proton Scattering”, Phys. Rev. Lett. 23 (1969), 935.
- [21] S. Catani, M. Ciafaloni et F. Hautmann, “High energy factorization and small-x heavy flavour production”, Nucl. Phys. B 366 (1991), 135.
- [22] V.N. Gribov et L.N. Lipatov, “Deep inelastic e p scattering in perturbation theory”, Sov. J. Nucl. Phys. 15 (1972), 438.  
G. Altarelli et G. Parisi, “Asymptotic freedom in parton language”, Nucl. Phys. B 126 (1977), 298.  
Y.L. Dokshitzer, “ Calculation of the structure functions for deep inelastic scattering and e+ e- annihilation by perturbation theory in Quantum Chromodynamics”, Sov. Phys. JETP 46 (1977), 641.

## Chapitre 2

# Calculs et méthodes

Dans ce chapitre, nous allons présenter différents aspects du calcul d'amplitudes, en particulier les méthodes habituelles de calcul de sections efficaces, la méthode amplitude d'hélicité, et quelques outils techniques.

### 2.1 Calcul de sections efficaces

Lorsqu'on cherche à calculer la section efficace d'une réaction, on suit un mode opératoire bien défini : on commence par tracer les diagrammes de Feynman associés, puis on calcule l'amplitude de Feynman  $\mathcal{M}$  de chaque diagramme en utilisant les règles de Feynman.

Considérons l'état initial  $|i\rangle$  d'une réaction. Soit une transformation canonique représentée par l'opérateur unitaire  $S$ . L'état final correspondant à cette transformation s'écrit  $S|i\rangle$ . L'amplitude de probabilité de trouver  $|f\rangle$  dans l'état final  $S|i\rangle$  est donnée par  $S_{fi} = \langle f|S|i\rangle$ . On peut écrire cette amplitude de probabilité en fonction de l'amplitude de Feynman :

$$S_{fi} = \delta_{fi} - i(2\pi)^4 \delta(p_f - p_i) N \mathcal{M}_{fi} , \quad (2.1)$$

où  $N$  est un facteur de normalisation et  $p$  désigne l'impulsion.

L'amplitude totale du processus est décrite par  $\mathcal{M} = \sum_j \mathcal{M}_{fi}^j$ . Si l'on considère les particules entrantes  $a$  et  $b$ , la section efficace différentielle s'écrit :

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta(p_f - p_i) \frac{1}{4E_a E_b |\vec{v}_a - \vec{v}_b|} \prod_f \left( \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3 2E_f} \right) |\mathcal{M}_{fi}|^2 , \quad (2.2)$$

où  $\vec{v}_a$  et  $\vec{v}_b$  sont les vitesses considérées colinéaires, et  $E$  dénote l'énergie. On peut montrer que :

$$E_a E_b |\vec{v}_a - \vec{v}_b| = \sqrt{(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2} . \quad (2.3)$$

Lorsqu'un faisceau de particules est non-polarisé, les détecteurs n'enregistrent aucune information sur l'hélicité des particules. Pour autoriser toutes les configurations d'hélicités (ou de spins), il faut moyenner le carré de l'amplitude de Feynman sur le spin des particules entrantes et sommer sur l'hélicité des particules dans l'état final, ce qui correspond à :

$$|\mathcal{M}_{fi}|^2 \longrightarrow |\overline{\mathcal{M}}_{fi}|^2 \equiv \frac{1}{(2s_a + 1)(2s_b + 1)} \sum_{\text{hélicités}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 . \quad (2.4)$$

On peut alors calculer la section efficace totale à partir de la section efficace différentielle en intégrant sur les impulsions dans l'état final [1].

Même si ce procédé de calcul est bien défini, en pratique de nombreux problèmes techniques apparaissent. En particulier, si l'on effectue des calculs à des ordres supérieurs, le nombre de diagrammes de Feynman à calculer devient très important, et les calculs sont souvent très compliqués.

## 2.2 Méthode Amplitude d'hélicité

La méthode qui vient d'être décrite permet donc de calculer la section efficace de réactions, que l'on moyenne sur les hélicités entrantes et que l'on somme sur les hélicités sortantes. L'inconvénient est que la section efficace obtenue est indépendante des hélicités, et ainsi on perd toute l'information sur chaque configuration.

Par contre, dans la méthode d'Amplitude d'hélicité [2–4], on réalise le calcul pour chaque combinaison d'hélicités des particules. Cette méthode a beaucoup d'avantages : tout d'abord, il n'y a aucune perte d'information sur les hélicités, et on calcule séparément l'amplitude pour chaque configuration. Comme les différentes configurations d'hélicité n'interfèrent pas, pour obtenir la section efficace totale, il suffit de sommer le carré de toutes les amplitudes qui peuvent contribuer au processus.

D'autre part, on peut profiter des propriétés d'invariance de jauge, ce qui nous permet d'avoir le choix d'une représentation explicite pour les vecteurs de polarisation, et ainsi de simplifier remarquablement les calculs.

Soit  $u(p)$  un spineur de Dirac non-massif, tel que

$$\not{p}u(p) = 0 \quad , \quad p^2 = 0 . \quad (2.5)$$

On définit les deux états d'hélicités par les projections chirales :

$$u_{\pm}(p) = \Pi_{\pm} u(p) \quad (2.6)$$

avec :

$$\Pi_{\pm} \equiv \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5) . \quad (2.7)$$

On utilise, pour les spineurs  $u_{\pm}(p)$  et leurs conjugués de charge  $\bar{u}_{\pm}(p)$ , la convention :

$$u_{\pm}(p) = |p_{\pm}\rangle , \quad (2.8)$$

$$\bar{u}_{\pm}(p) = \langle p_{\pm}| . \quad (2.9)$$

On normalise les spineurs comme suit :

$$\langle p_{\pm} | \gamma_{\mu} | p_{\pm} \rangle = 2p_{\mu} . \quad (2.10)$$

On peut relier les vecteurs de polarisation non-massifs  $\epsilon_{\mu}^{\pm}$  aux spineurs non-massifs par :

$$\epsilon_{\mu}^{+}(p) = A \bar{u}_{+}(p) \gamma_{\mu} v , \quad (2.11)$$

$$\epsilon_{\mu}^{-}(p) = (\epsilon_{\mu}^{+}(p))^* , \quad (2.12)$$

où  $v$  est un spineur de Dirac a priori arbitraire, et  $A$  est une constante de normalisation, nécessaire pour satisfaire les relations habituelles d'orthonormalisation des vecteurs de polarisation circulaire :

$$\epsilon^{+}(p) \cdot (\epsilon^{-}(p))^* = 0 , \quad (2.13)$$

$$\epsilon^{+}(p) \cdot (\epsilon^{+}(p))^* = -1 . \quad (2.14)$$

De plus, ces vecteurs de polarisation satisfont :

$$\epsilon^{\pm}(p) \cdot p = 0 . \quad (2.15)$$

L'invariance de jauge associée au vecteur non-massif peut être paramétrée à l'aide d'un choix du spineur  $v$ . En particulier, en introduisant le vecteur de référence arbitraire non-massif  $r$ , on peut écrire, pour un choix de jauge adéquat [2] :

$$\epsilon_{\mu}^{+}(p, r) = A \langle r_{-} | \gamma_{\mu} | p_{-} \rangle , \quad (2.16)$$

$$\epsilon_{\mu}^{-}(p, r) = A^* \langle r_{+} | \gamma_{\mu} | p_{+} \rangle . \quad (2.17)$$

Les propriétés d'orthonormalisation fixent la valeur de  $A$ , de manière à ce que :

$$\epsilon_{\mu}^{+}(p, r) = \frac{\langle r_{-} | \gamma_{\mu} | p_{-} \rangle}{\sqrt{2} \langle r_{-} | p_{+} \rangle} , \quad (2.18)$$

$$\epsilon_{\mu}^{-}(p, r) = \frac{\langle r_{+} | \gamma_{\mu} | p_{+} \rangle}{\sqrt{2} \langle r_{-} | p_{+} \rangle^*} . \quad (2.19)$$

Les vecteurs de polarisation se contractent avec les matrices  $\gamma$  de la manière suivante :

$$\not{\epsilon}_{\mu}^{+}(p, r) = \frac{\sqrt{2}}{\langle r_{-} | p_{+} \rangle} [ |p_{-}\rangle \langle r_{-}| + |r_{+}\rangle \langle p_{+}| ] , \quad (2.20)$$



$$\not{e}_\mu^-(p, r) = \frac{\sqrt{2}}{\langle r_- | p_+ \rangle^*} [ |p_+\rangle \langle r_+| + |r_-\rangle \langle p_-| ] . \quad (2.21)$$

Par la suite, un choix adéquat de  $r$  peut permettre de simplifier remarquablement les calculs. On peut aussi utiliser les propriétés des spineurs non-massifs, qui sont énoncées ci-après.

La représentation des vecteurs de polarisation en terme de spineurs a été généralisée dans le cas de particules massives de spin 1/2, 1 ou 3/2 dans [5].

### Propriétés des spineurs non-massifs

Pour des spineurs non-massifs d'impulsions  $p$  et  $q$ , on a :

$$\langle p_+ | q_+ \rangle = \langle p_- | q_- \rangle = 0 \quad (2.22)$$

$$\langle p_- | q_+ \rangle = -\langle q_- | p_- \rangle \quad (2.23)$$

$$\langle p_- | p_+ \rangle = \langle p_+ | p_- \rangle = 0 . \quad (2.24)$$

Pour simplifier les notations, on prend :

$$\langle p_- | q_+ \rangle = \langle p q \rangle , \quad (2.25)$$

et on a donc :

$$\langle q_- | p_+ \rangle = -\langle p q \rangle \quad (2.26)$$

$$\langle q_+ | p_- \rangle = \langle p q \rangle^* \quad (2.27)$$

$$\langle p_+ | q_- \rangle = -\langle p q \rangle^* , \quad (2.28)$$

et

$$|\langle p q \rangle|^2 = 2(p \cdot q) . \quad (2.29)$$

D'autre part :

$$\not{p} = |p_-\rangle \langle p_-| + |p_+\rangle \langle p_+| , \quad (2.30)$$

et

$$|p_+\rangle \langle p_+| = \Pi_+ \not{p} \quad (2.31)$$

$$|p_-\rangle \langle p_-| = \Pi_- \not{p} . \quad (2.32)$$

Nous allons utiliser ces propriétés par la suite.

Lors du calcul d'amplitudes, des divergences peuvent apparaître. Il est possible d'évaluer la divergence des intégrales à l'aide du comptage de puissance (voir chapitre 1).

## 2.3 Eléments de calcul intégral

Lorsqu'on voit apparaître des divergences dans les intégrales, on va chercher à les isoler par régularisation. En particulier, dans la régularisation dimensionnelle, on va effectuer les calculs non plus en 4 dimensions, mais en  $n$  dimensions.

Lors du calcul des amplitudes, l'intégrale suivante apparaît comme un élément de base :

$$I_{r,m} = \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{(l^2)^r}{(l^2 - R^2)^m} , \quad (2.33)$$

avec  $r$  et  $m$  des nombres entiers positifs ou nuls. On se place dans l'espace euclidien par une rotation de Wick. Dans l'espace de Minkowski, on avait :

$$l^2 = l_0^2 - |\vec{l}|^2 . \quad (2.34)$$

L'intégrale  $I_{r,m}$  vaut donc :

$$I_{r,m} = \int \frac{d^{n-1} \vec{l}}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} dl_0 \frac{(l_0^2 - |\vec{l}|^2)^r}{(l_0^2 - |\vec{l}|^2 - R^2)^m} . \quad (2.35)$$

Par transformation de Wick, le vecteur  $l$  devient :

$$\begin{aligned} l &\longrightarrow l_E \\ l_0 &\longrightarrow i l_{E0} \\ \vec{l} &\longrightarrow \vec{l}_E \end{aligned} \quad (2.36)$$

On réécrit donc  $I_{r,m}$  sous la forme :

$$\begin{aligned} I_{r,m} &= \int \frac{d^{n-1} \vec{l}_E}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{+\infty} i dl_{E0} \frac{(-l_{E0}^2 - |\vec{l}_E|^2)^r}{(-l_{E0}^2 - |\vec{l}_E|^2 - R^2)^m} \\ &= i(-1)^{r-m} \int \frac{d^n l_E}{(2\pi)^n} \frac{(l_E^2)^r}{(l_E^2 + R^2)^m} . \end{aligned} \quad (2.37)$$

On peut passer en coordonnées sphériques :

$$\int d^n l_E \equiv \int |l_E|^{(n-1)} d|l_E| d\Omega_n , \quad (2.38)$$

où  $\Omega_n$  est l'angle solide en  $n$  dimensions. On peut montrer que :

$$\int d\Omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \quad (2.39)$$

Donc,  $I_{r,m}$  vaut :

$$I_{r,m} = \frac{i(-1)^{r-m}}{\Gamma(n/2)} \int_0^{+\infty} \frac{d|l_E|}{(4\pi)^{n/2}} |l_E|^{(n-1)} \frac{(|l_E|^2)^r}{(|l_E|^2 + R^2)^m} . \quad (2.40)$$

On peut calculer cette intégrale en utilisant la formule suivante :

$$\int_0^\infty dx \frac{x^p}{(x^n + z^n)^q} = \frac{1}{n} z^{(p+1-nq)} \frac{\Gamma(\frac{p+1}{n}) \Gamma(q - \frac{p+1}{n})}{\Gamma(q)} , \quad (2.41)$$

et on en déduit :

$$\boxed{\int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{(l^2)^r}{(l^2 - R^2)^m} = i \frac{(-1)^{(r-m)}}{(4\pi)^{n/2}} (R^2)^{(n/2+r-m)} \frac{\Gamma(n/2 + r) \Gamma(m - r - n/2)}{\Gamma(m) \Gamma(n/2)}} . \quad (2.42)$$

Lorsqu'on travaille en  $n$  dimensions, il est parfois nécessaire de séparer les 4 dimensions habituelles des  $n-4$  dimensions restantes. Dans ce cas, puisque les espaces sont orthogonaux, on peut écrire  $l$  sous la forme :

$$l^2 = \hat{l}^2 + \tilde{l}^2 , \quad (2.43)$$

où  $\hat{l}$  est la partie en 4 dimensions et  $\tilde{l}$  la partie en  $n-4$  dimensions.

Alors, on peut montrer d'une manière similaire (voir Annexe B.2) que :

$$\int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{(\tilde{l}^2)^r}{(l^2 - R^2)^m} = \frac{i(-1)^{(r-m)}}{(4\pi)^{n/2}} (R^2)^{(n/2+r-m)} \frac{\Gamma(n/2 + r - 2) \Gamma(m - r - n/2)}{\Gamma(m) \Gamma(n/2 - 2)} , \quad (2.44)$$

et

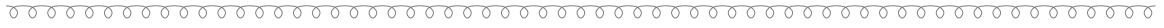
$$\int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{(\hat{l}^2)^r}{(l^2 - R^2)^m} = \frac{i(-1)^{(r-m)}}{(4\pi)^{n/2}} (R^2)^{(n/2+r-m)} \frac{\Gamma(2 + r) \Gamma(m - r - n/2)}{\Gamma(m)} . \quad (2.45)$$

Cette première partie est désormais terminée. Nous y avons présenté les bases de la théorie QCD, ainsi que des outils que nous allons maintenant utiliser et appliquer au calcul de processus multi-particules.

---

# Bibliographie

- [1] C. Itzykson et J.-B. Zuber, “Quantum Field Theory”, McGraw–Hill Editions (1980), ISBN 0-07-066353-X.
- [2] Z. Xu, D. Zhang et L. Chang, “Helicity amplitudes for multiple Bremsstrahlung in massless nonabelian gauge theories”, Nucl. Phys. B291 (1987), 392.
- [3] M.L. Mangano et S.J. Parke, “Multiparton amplitudes in gauge theories”, Phys. Rept. 200 (1991), 301.
- [4] Z. Bern, L. Dixon et D.A. Kosower, “Progress in one loop QCD computations”, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 46 (1996), 109.
- [5] G. Passarino, “Covariant polarization bases for spin = 1/2, 1, 3/2 particles and their use”, Nucl. Phys. B 237 (1984), 249.
- [6] T.-P. Cheng et L.-F. Li, “Gauge theory of elementary particle physics”, Oxford University Press, Oxford (1984), ISBN 0-19-851956-7.



Deuxième partie

Calcul des processus multi-particules



---

## Chapitre 3

# Méthodes de Réduction des intégrales

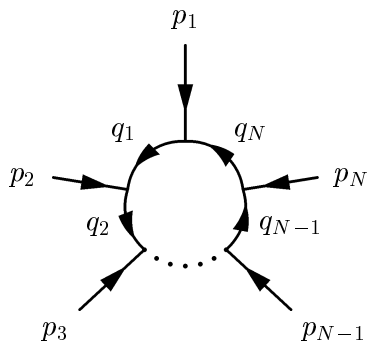
---

### 3.1 Introduction

Une nouvelle génération de collisionneurs (en particulier LHC au CERN) va entrer en fonction dans les prochaines années, donnant accès à de très hautes énergies. La capacité de découverte de nouvelles particules (et donc de nouvelle Physique) de telles machines est extrêmement élevée et la quantité de données expérimentales produite sera extraordinairement grande. Il sera donc très important d'avoir des prédictions théoriques précises de la production de particules dans ces collisionneurs. Les calculs à l'ordre de Born ne fournissent pas une telle précision à cause de leur grande dépendance en fonction des échelles (voir le chapitre 1). Lorsqu'on effectue des calculs aux ordres supérieurs de la série perturbative, on rencontre des intégrales de boucle, qui sont hautement non triviales.

Ce chapitre est consacré au calcul des intégrales de boucle. La complexité des intégrales croît avec le nombre de particules (pattes) externes. De plus, à cause des divergences infrarouges qui apparaissent, il est nécessaire de travailler non plus en 4 dimensions, mais en  $n$ . Des méthodes de réduction des intégrales scalaires (c'est-à-dire des intégrales sans indice de Lorentz au numérateur) ont été développées (voir par exemple [1, 2]). Il existe aussi des formules pour relier les intégrales tensorielles aux intégrales scalaires [3, 4], mais seulement pour le cas massif. Une méthode générale de réduction aussi bien pour les intégrales scalaires que pour les intégrales tensorielles à  $N$  points a été présentée dans [5], qui présente une solution au problème de l'inversion de la matrice de Gram pour  $N > 6$ .



FIG. 3.1 – Diagramme à  $N$  points.

Dans ce chapitre, nous allons étendre et appliquer le formalisme de [5]. L'idée principale sera ici de séparer l'intégrale en deux parties : une partie libre de divergence, donc calculable à 4 dimensions, et une autre qui contient toutes les divergences infrarouges mais dont le nombre de propagateurs est réduit.

Nous allons nous intéresser tout d'abord au cas des intégrales scalaires, puis nous passerons au cas des intégrales tensorielles. On étudiera aussi la réduction des intégrales à 6 ou 8 dimensions.

## 3.2 Intégrales scalaires

Considérons une amplitude à une boucle et à  $N$  points (voir figure (3.1)) avec des propagateurs non massifs. L'intégrale correspondant à cette amplitude s'écrit<sup>1</sup> :

$$I = \int \frac{d^n k}{i\pi^{n/2}} \frac{1}{\prod_{i=1}^N q_i^2} . \quad (3.1)$$

Si au moins l'un des propagateurs internes est sans masse, l'intégrale est divergente dans l'infrarouge et il est nécessaire de la régulariser. Ainsi, on se place dans le cadre de la régularisation dimensionnelle, et on travaillera donc en  $n = 4 + 2\varepsilon$  (avec  $\varepsilon > 0$ ). Les particules externes sont considérées à 4 dimensions.

On considérera que toutes les impulsions externes  $p_i$  sont entrantes. La conservation de l'énergie-impulsion nous donne :

$$\sum_{i=1}^N p_i = 0 . \quad (3.2)$$

Les impulsions internes s'écrivent :

$$q_i = k + r_i . \quad (3.3)$$

---

<sup>1</sup>Le facteur  $1/i\pi^{n/2}$  est choisi ici à la place de  $1/(2\pi)^n$  de manière à alléger les notations.

$k$  correspond à l'impulsion tournant dans la boucle, et les  $r_i$  sont des vecteurs indéterminés. A cause de la conservation d'énergie-impulsion, les quadri-vecteurs  $r_i$  ne sont pas indépendants et respectent  $r_i = p_i + r_{i-1}$ .

La méthode qu'on entreprend ici consiste à ajouter et soustraire un terme à (3.1) tel que l'intégrale se sépare en deux parties : une qui est finie, c'est-à-dire libre de toute divergence, tandis que l'autre contient toutes les divergences mais possède un propagateur de moins.

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{d^n k}{i\pi^{n/2}} \frac{\sum_{i=1}^N b_i q_i^2}{\prod_{i=1}^N q_i^2} + \int \frac{d^n k}{i\pi^{n/2}} \frac{\left(1 - \sum_{i=1}^N b_i q_i^2\right)}{\prod_{i=1}^N q_i^2} \\ &= I_{\text{div}} + I_{\text{fin}} . \end{aligned} \quad (3.4)$$

On va choisir les  $b_i$  de manière à ce qu'ils annulent les divergences infrarouges dans le terme de droite de (3.4). Cette intégrale constitue la partie finie de l'intégrale  $I$ . Elle possède le même nombre de propagateurs que l'intégrale d'origine, mais a cependant l'avantage de pouvoir être calculée en 4 dimensions.

Au contraire, le premier terme de (3.4) contient des divergences infrarouges, mais le nombre de propagateurs a diminué, puisque des  $q_i^2$  du numérateur peuvent se simplifier avec des  $q_i^2$  du dénominateur. Elle est donc bien moins compliquée que l'intégrale de départ. On pourra également réitérer l'opération de réduction sur cette dernière. Au final, toute la partie divergente se retrouvera dans les fonctions à 3 points, qui sont plus simples à calculer que les intégrales d'origine. On pourra se reporter à la figure (3.2) pour une description schématique du procédé.

Si l'on applique le paramétrage de Feynman (voir annexe B) sur la partie finie de l'intégrale (3.4) de manière à mettre le dénominateur sous la forme  $(l^2 - R^2)$ , on trouve :

$$I_{\text{fin}} = \Gamma(N) \int_0^1 \prod_{k=1}^N dz_k \delta\left(1 - \sum_{j=1}^N z_j\right) \int \frac{d^n k}{i\pi^{n/2}} \frac{\left(1 - \sum_{i=1}^N b_i q_i^2\right)}{\left(\sum_{i=1}^N z_i q_i^2\right)^N} , \quad (3.5)$$

où, en utilisant l'équation (3.3), le dénominateur peut s'écrire comme :

$$\sum_{i=1}^N z_i q_i^2 = \left(k + \sum_{i=1}^N z_i r_i\right)^2 - R^2 , \quad (3.6)$$

avec :

$$R^2 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N z_i z_j \mathcal{S}_{ij} = -\sum_{i=1}^N \sum_{j>i} z_i z_j \mathcal{S}_{ij} . \quad (3.7)$$

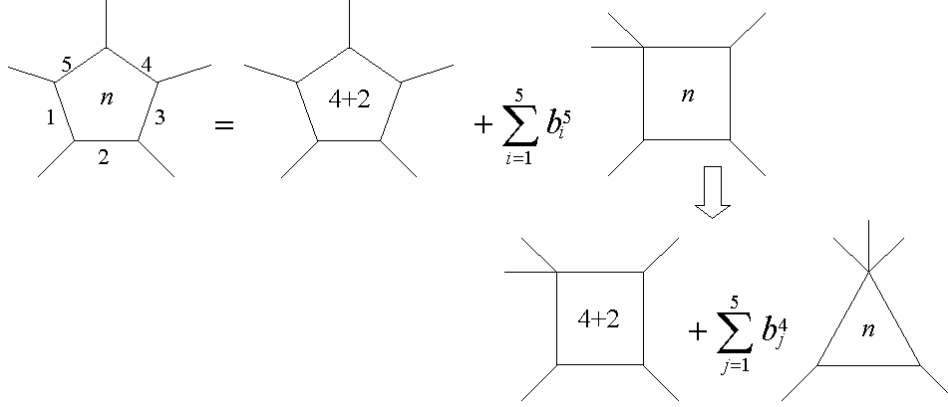


FIG. 3.2 – Présentation schématique de la réduction des intégrales scalaires. Le diagramme pentagone en  $n$  dimensions peut se réécrire comme la somme d'un pentagone en 4 dimensions et de diagrammes en boîte en  $n$  dimensions qui contiennent toute la partie divergente. Ces derniers peuvent à leur tour être réduits.

Le facteur  $1/2$  tient compte du double comptage. Les  $\mathcal{S}_{ij}$  sont les éléments de la matrice  $\mathcal{S}$ , qui contient toutes les informations cinématiques. Ils sont définis comme  $\mathcal{S}_{ij} = (r_i - r_j)^2$ , et sont symétriques et invariants par translation des  $r$ .

On effectue donc le changement de variable :

$$k \longrightarrow l - \sum_{i=1}^N z_i r_i . \quad (3.8)$$

On peut réécrire les quadri-vecteurs  $q_j$  après ce changement de variable :

$$q_j \longrightarrow l + \sum_{i=1}^N z_i \Delta_{ji} , \quad (3.9)$$

avec :  $\Delta_{ab} = r_a - r_b$ , qui est invariant par translation des  $r$  (les  $r$  sont arbitraires, seule leur différence ne l'est pas).

Ainsi, le numérateur de  $I_{\text{fin}}$  devient :

$$1 - \sum_{i=1}^N b_i q_i^2 \longrightarrow - (l^2 + R^2) \sum_{i=1}^N b_i + \sum_{i=1}^N z_i \left( 1 - \sum_{j=1}^N b_j \mathcal{S}_{ij} \right) . \quad (3.10)$$

Le premier terme représente la partie finie : il ajoute soit une puissance  $l^2$  soit une puissance  $R^2$  au numérateur. Si l'on considère la formule (2.42), on remarque qu'il s'agit d'une

intégrale en  $(R^2)^{n/2+1-N} = (R^2)^{(n+2)/2-N}$ , que l'on appelle communément "intégrale à 6 dimensions".

Au contraire, le terme de droite est potentiellement divergent et doit donc être annulé. On impose alors :

$$\mathcal{S}\mathcal{B} = \mathbb{I} \ , \quad (3.11)$$

$$\text{où } \mathcal{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} \text{ et } \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Dans le cas où  $\mathcal{S}$  est inversible, on trouve :

$$b_i = \sum_{j=1}^N \mathcal{S}_{ji}^{-1} \ . \quad (3.12)$$

L'équation (3.11) n'a pas une solution unique pour  $N \geq 7$ . En effet, dans ce cas  $\det(\mathcal{S}) = 0$ , donc  $\mathcal{S}$  n'est pas inversible. Une solution serait alors de définir un pseudo-inverse pour  $\mathcal{S}$ . Cette tâche étant difficile, on préfère définir une autre matrice (dite de Gram) pour pallier à ce problème :

$$G_{ij}^{(N-1) \times (N-1)} = r_i \cdot r_j \ . \quad (3.13)$$

On choisit  $r_N = 0$ , si bien que  $G$  est une matrice carrée de rang  $(N-1)$ . Elle est reliée à la matrice  $\mathcal{S}$  par :

$$\mathcal{S}_{ij} = -2 G_{ij} + r_i^2 + r_j^2 \ . \quad (3.14)$$

L'équation (3.11) peut alors être exprimée sous la forme :

$$\sum_{j=1}^{N-1} G_{ij} b_j = \frac{1}{2} r_i^2 \sum_{j=1}^N b_j \quad , \quad \sum_{j=1}^{N-1} r_j^2 b_j = 1 \ . \quad (3.15)$$

Ce sont ces deux équations que l'on résout lorsque  $\det(\mathcal{S}) = 0$ . Pour  $N \geq 7$ , on a aussi  $\det(G) = 0$ . Une solution de (3.15) peut être trouvée dans ce cas à partir du "pseudo-inverse" de  $G$ , appelé  $H$ . Ce dernier est défini par la condition  $HGH = H$  et  $GHG = G$ . Il est possible de construire ce  $H$ . Pour plus de détails, on se reportera à [5, 6].

Ainsi, en remplaçant (3.10) dans (3.5), l'intégrale  $I_{\text{fin}}$  peut se réécrire :

$$I_{\text{fin}} = -\Gamma(N) \left( \sum_{i=1}^N b_i \right) \int_0^1 \prod_{k=1}^N dz_k \delta(1 - \sum_{j=1}^N z_j) \int \frac{d^n k}{i\pi^{n/2}} \frac{l^2 + R^2}{(l^2 - R^2)^N} \ . \quad (3.16)$$

En utilisant la formule (2.42), on montre que :

$$I_{\text{fin}} = -(-1)^N \left( \sum_{i=1}^N b_i \right) (N - n - 1) \Gamma(N - 1 - n/2) \int_0^1 \prod_{k=1}^N dz_k \delta(1 - \sum_{j=1}^N z_j) (R^2)^{n/2+1-N} \quad (3.17)$$

Nous venons donc de calculer la partie finie de l'intégrale (3.4). Pour trouver l'intégrale de départ, il restera donc à lui ajouter la partie réduite.

On remarque que :

- pour  $N = 5$ , l'intégrale  $I_{\text{fin}}$ , étant proportionnelle à  $(N - n - 1)$ , est d'ordre  $\varepsilon$ . On peut donc la négliger.
- pour  $N = 6$  : la conservation d'énergie-impulsion nous conduit à dire que seulement 5 des 6 quadri-vecteurs externes doivent être indépendants. Cependant, l'espace-temps étant à 4 dimensions, il existe une relation supplémentaire entre ces quadrivecteurs, qui se traduit par  $\det(G) = 0$ . Cette relation conduit à des contraintes non-linéaires sur les variables de Mandelstam. On peut cependant montrer que [5] :

$$B \equiv \sum_{i=1}^N b_i \propto \det(G) , \quad (3.18)$$

ce qui correspond à des contraintes linéaires sur les  $b_i$ . Il s'agit ici d'un avantage considérable de cette méthode de réduction.

Ainsi, pour  $N = 6$ , on a  $\sum_{i=1}^6 b_i = 0$ , et la partie finie de l'intégrale (3.4) est donc nulle. Par conséquent, l'intégrale à 6 points (3.4) s'écrit sous la forme d'une somme d'intégrales à 5 points.

- pour  $N = 7$  (et plus) : avec le même raisonnement que pour  $N = 6$ , on montre que  $\sum_{i=1}^N b_i = 0$ , et l'intégrale (3.4) n'a donc pas de partie finie. Les intégrales à  $N$  points peuvent ainsi être exprimées en fonctions d'intégrales à  $N - 1$  points.

Au final, pour  $N \geq 6$ , la partie finie étant nulle, il n'est pas nécessaire de calculer des intégrales de dimensions supérieures. On échappe ainsi au calcul très compliqué de ces intégrales.

### 3.3 Intégrales tensorielles

Les intégrales rencontrées ont souvent une structure tensorielle. D'une manière similaire au cas des intégrales scalaires, il est possible de réduire les intégrales tensorielles à une boucle, à  $N$  points et de rang  $L$ . On développera dans la suite un formalisme de réduction invariant par translation des impulsions internes.

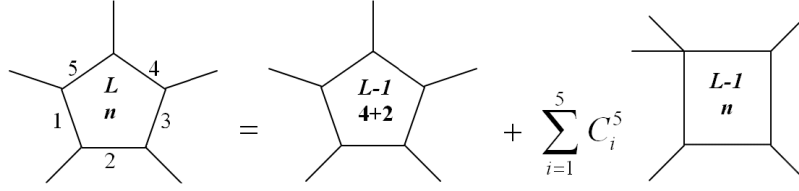


FIG. 3.3 – Présentation schématique de la réduction des intégrales tensorielles. Le diagramme pentagone à  $n$  dimensions et de rang  $L$  peut se réécrire comme la somme d'un pentagone à 4 dimensions et de rang  $(L - 1)$  et de diagrammes en boîte à  $n$  dimensions et de rang  $(L - 1)$ , qui contiennent toute la partie divergente. Ces derniers peuvent à leur tour être réduits.

### 3.3.1 Méthode

L'idée de base est encore de séparer l'intégrale en deux parties : une partie libre de divergence et une autre, réduite, qui contiendrait toutes les divergences. Pour cela, on ajoute et on soustrait un terme à un propagateur du numérateur<sup>2</sup>. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 I^{\mu_1 \dots \mu_L} &= \int \frac{d^n k}{i\pi^{n/2}} \frac{\prod_{j=1}^L q_j^{\mu_j}}{\prod_{i=1}^N q_i^2} \\
 &= \int \frac{d^n k}{i\pi^{n/2}} \frac{\sum_{k=1}^N c_{k1}^{\mu_1} q_k^2 \prod_{j=2}^L q_j^{\mu_j}}{\prod_{i=1}^N q_i^2} + \int \frac{d^n k}{i\pi^{n/2}} \frac{\left( q_1^{\mu_1} - \sum_{k=1}^N c_{k1}^{\mu_1} q_k^2 \right) \prod_{j=2}^L q_j^{\mu_j}}{\prod_{i=1}^N q_i^2} \\
 &= I_{\text{div}}^{\mu_1 \dots \mu_L} + I_{\text{fin}}^{\mu_1 \dots \mu_L} .
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

De même que dans le cas scalaire, le premier terme de (3.19) peut être réduit en simplifiant des  $q_j^2$  du numérateur avec des  $q_i^2$  du dénominateur. Cette intégrale constituera la partie divergente de  $I$ . Ainsi, avec la même procédure, on réduit en même temps le nombre de propagateurs et le rang. Une description schématique est présentée sur la figure (3.3).

On introduit les paramètres de Feynman, de manière à ce que le dénominateur prenne

<sup>2</sup>On pourrait également effectuer la procédure de soustraction et d'addition sur deux, trois ou tous les  $q_j$  du numérateur. Cela permettrait de réduire plusieurs rang en même temps, mais va accroître la complexité des intégrales.

la forme  $(l^2 - R^2)$ . On obtient alors :

$$l = k + \sum_{i=1}^N z_i r_i , \quad (3.20)$$

$$R^2 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N z_i z_j \mathcal{S}_{ij} , \quad (3.21)$$

ce qui conduit, en utilisant la relation (3.3), à :

$$q_j = l + \sum_{i=1}^N z_i \Delta_{ji} . \quad (3.22)$$

Par conséquent, la quantité  $q_a^\mu - \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{ja}^\mu q_j^2$  présente dans le terme de droite de (3.19) se transforme de la façon suivante :

$$\begin{aligned} q_a^\mu - \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{ja}^\mu q_j^2 &\longrightarrow l^\mu + \sum_{i=1}^N z_i \Delta_{ai}^\mu \\ &\quad - \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{ja}^\mu \left[ l^2 + \left( \sum_{i=1}^N z_i \Delta_{ji} \right)^2 + 2l \cdot \sum_{i=1}^N z_i \Delta_{ji} \right] . \end{aligned} \quad (3.23)$$

On peut montrer que :

$$\left( \sum_{i=1}^N z_i \Delta_{ji} \right)^2 = \sum_{i=1}^N z_i \mathcal{S}_{ji} + R^2 .$$

L'équation précédente se réécrit donc :

$$\begin{aligned} q_a^\mu - \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{ja}^\mu q_j^2 &\longrightarrow l^\rho \left( g^{\mu\rho} - 2 \sum_{i=1}^N z_i \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{ja}^\mu \Delta_{ji}^\rho \right) - (l^2 + R^2) \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{ja}^\mu \\ &\quad + \sum_{i=1}^N z_i \left( \Delta_{ai}^\mu - \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{ja}^\mu \mathcal{S}_{ji} \right) . \end{aligned} \quad (3.24)$$

On choisit  $\mathcal{C}_{ka}^\mu$  de manière à annuler le dernier terme, potentiellement divergent. Ainsi :

$$\mathcal{C}_{ka}^\mu = - \sum_{j=1}^N \mathcal{S}_{kj}^{-1} \Delta_{ja}^\mu . \quad (3.25)$$

L'équation (3.24) devient alors :

$$q_a^\mu - \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{ja}^\mu q_j^2 \longrightarrow l^\rho \left( g^{\mu\rho} + 2 \sum_{i=1}^N z_i \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \mathcal{S}_{jk}^{-1} \Delta_{ka}^\mu \Delta_{ji}^\rho \right) + (l^2 + R^2) \sum_{k=1}^N b_k \Delta_{ka}^\mu , \quad (3.26)$$

où les  $b_k$  sont les mêmes que pour le cas scalaire (voir (3.12)).

On introduit les notations :

$$\mathcal{T}_{ab}^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} + 2 \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \mathcal{S}_{jk}^{-1} \Delta_{ja}^\mu \Delta_{kb}^\nu , \quad (3.27)$$

et

$$\mathcal{V}_a^\mu \equiv \sum_{k=1}^N b_k \Delta_{ka}^\mu , \quad (3.28)$$

qui permettent d'obtenir des formules plus compactes. L'équation (3.26) s'écrit donc :

$$q_a^\mu - \sum_{j=1}^N c_{ja}^\mu q_j^2 \longrightarrow l^\rho \left( \mathcal{T}_{ab}^{\mu\rho} + 2 \sum_{i=1}^N z_i \Delta_{bi}^\rho \mathcal{V}_a^\mu \right) + (l^2 + R^2) \mathcal{V}_a^\mu . \quad (3.29)$$

En effectuant la transformation (3.29), on obtient :

$$\begin{aligned} I_{\text{fin}}^{\mu_1 \cdots \mu_L} &= \Gamma(N) \int_0^1 \prod_{k=1}^N dz_k \delta(1 - \sum_{m=1}^N z_m) \\ &\times \int \frac{d^n l}{i\pi^{n/2}} \frac{\left[ l^\rho \left( \mathcal{T}_{ab}^{\mu_1 \rho} + 2 \sum_{i=1}^N z_i \Delta_{bi}^\rho \mathcal{V}_a^{\mu_1} \right) + (l^2 + R^2) \mathcal{V}_a^{\mu_1} \right] \prod_{j=2}^L \left( l^{\mu_j} + \sum_{i=1}^N z_i \Delta_{ji}^{\mu_j} \right)}{(l^2 - R^2)^N} . \end{aligned} \quad (3.30)$$

Cette intégrale ne contient pas de divergence infrarouge, et elle peut donc s'écrire sous la forme d'une intégrale à 6 dimensions. Le produit de droite du numérateur doit être développé et multiplié soit par le terme en  $(l^2 + R^2)$ , soit par celui en  $l^\rho$ . Au final, les termes comportant un nombre impair de  $l$  au numérateur sont nuls.

Etudions avec plus de détails le cas des intégrales avec  $N = 5$  et  $N = 6$ .

- Commençons par le cas  $N = 6$ . La partie finie est alors nulle, car :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_a^\mu &= 0 , \\ \mathcal{T}_{ab}^{\mu\nu} &= 0 . \end{aligned}$$

### Démonstration

Pour les fonctions à 6 points,  $\mathcal{V}$  est défini comme :

$$\mathcal{V}_a^\mu \equiv \sum_{i=1}^6 b_i \Delta_{ia}^\mu . \quad (3.31)$$

On contracte cette expression avec  $\Delta_{kl}^\mu$ , pour  $k$  et  $l$  quelconques. Alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_a^\mu \Delta_{kl}^\mu &= \sum_{i=1}^6 b_i \Delta_{ia} \cdot \Delta_{kl} \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \mathcal{S}_{ij}^{-1} \right) (\mathcal{S}_{il} + \mathcal{S}_{ak} - \mathcal{S}_{ik} - \mathcal{S}_{al}) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^6 \delta_{jl} - \sum_{j=1}^6 \delta_{jk} + (\mathcal{S}_{ak} - \mathcal{S}_{al}) \sum_{j=1}^6 b_j \right) \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{S}_{ak} - \mathcal{S}_{al}) \sum_{j=1}^6 b_j . \end{aligned} \quad (3.32)$$



Comme  $N = 6$ , on a  $\sum_{j=1}^6 b_j = 0$ , d'où :

$$\mathcal{V}_a^\mu \Delta_{kl}^\mu = 0 \quad . \quad (3.33)$$

Etant donné que  $N = 6$ , il est possible de trouver 4 vecteurs  $\Delta$  linéairement indépendants. Par conséquent, l'équation (3.33) implique  $\mathcal{V}_a^\mu = 0$ .

De la même manière, on montre que  $\mathcal{T}_{ab}^{\mu\nu} = 0$  :

On définit

$$\mathcal{X}_{ab}^{\mu\nu} \equiv \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 \mathcal{S}_{jk}^{-1} \Delta_{ja}^\mu \Delta_{kb}^\nu \quad . \quad (3.34)$$

On contracte cette expression avec  $\Delta_{il}^\mu \Delta_{mn}^\nu$ , et on trouve :

$$\mathcal{X}_{ab}^{\mu\nu} \Delta_{il}^\mu \Delta_{mn}^\nu = \frac{1}{2} \left( -(\Delta_{mn} \cdot \Delta_{il}) + \frac{1}{2} (\mathcal{S}_{ai} - \mathcal{S}_{al})(\mathcal{S}_{mb} - \mathcal{S}_{nb}) \sum_{j=1}^6 b_j \right) \quad . \quad (3.35)$$

Là encore,  $\sum_{j=1}^6 b_j = 0$ , on a donc :

$$\mathcal{X}_{ab}^{\mu\nu} \Delta_{il}^\mu \Delta_{mn}^\nu = -\frac{1}{2} \Delta_{mn}^\mu \Delta_{il}^\mu \quad . \quad (3.36)$$

Comme on peut choisir les  $\Delta$  de manière à ce qu'ils forment une base de l'espace vectoriel, on a nécessairement :

$$\mathcal{X}_{ab}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \quad . \quad (3.37)$$

On remplace  $\mathcal{X}_{ab}^{\mu\nu}$  dans l'équation (3.27), et on trouve :

$$\mathcal{T}_{ab}^{\mu\nu} = 0 \quad . \quad (3.38)$$

Donc, pour  $N = 6$ ,  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{T}$  sont nuls.

Ainsi, si on remplace  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{T}$  dans l'équation (3.29), on trouve :

$$q_a^\mu - \sum_{j=1}^N C_{ja}^\mu q_j^2 = 0 \quad , \quad (3.39)$$

et la partie finie ( $I_{\text{fin}}$ ) est donc nulle.

• Pour  $N = 5$ , la partie finie de l'intégrale (3.19) est d'ordre  $\varepsilon$ , et on n'a donc pas besoin de la calculer. (C'est vrai pour les intégrales à une boucle. Pour les intégrales à deux boucles, elle sera multipliée par un terme divergent, et il faudrait alors en extraire la partie finie.)

Pour démontrer cela, on a besoin d'utiliser la relation suivante, qui permettra d'annuler la

partie finie (3.31) :

$$\mathcal{T}_{ab}^{\mu\nu} = 2 \frac{\mathcal{V}_a^\mu \mathcal{V}_b^\nu}{B} , \quad (3.40)$$

où  $B \equiv \sum_j b_j$ .

#### Démonstration

On définit le tenseur :

$$\mathcal{Y}_{ab}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{B} \sum_j \sum_k b_j b_k \Delta_{ja}^\mu \Delta_{kb}^\nu . \quad (3.41)$$

On multiplie cette équation par  $\Delta_{il}^\mu \Delta_{mn}^\nu$  et on obtient :

$$\mathcal{Y}_{ab}^{\mu\nu} \Delta_{il}^\mu \Delta_{mn}^\nu = \frac{1}{4} (\mathcal{S}_{ai} - \mathcal{S}_{al}) (\mathcal{S}_{mb} - \mathcal{S}_{nb}) B . \quad (3.42)$$

En soustrayant de cette équation l'expression (3.35), on trouve :

$$(\mathcal{X}_{ab}^{\mu\nu} - \mathcal{Y}_{ab}^{\mu\nu}) \Delta_{il}^\mu \Delta_{mn}^\nu = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \Delta_{il}^\mu \Delta_{mn}^\nu . \quad (3.43)$$

En remplaçant  $\mathcal{X}_{ab}^{\mu\nu}$  et  $\mathcal{Y}_{ab}^{\mu\nu}$  par leurs expressions et en utilisant la définition de  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{T}$  on obtient :

$$\mathcal{T}_{ab}^{\mu\nu} = 2 \frac{\mathcal{V}_a^\mu \mathcal{V}_b^\nu}{B} . \quad (3.44)$$

Comme on ne peut définir que quatre  $\Delta$  linéairement indépendants pour  $N = 5$ , cette égalité n'est valable qu'en 4 dimensions. Elle servira à montrer que les termes de dimensions supérieures sont pour  $N = 5$  d'ordre  $\varepsilon$ .

### 3.3.2 Résultats

Revenons maintenant à l'équation (3.31), et commençons par calculer cette intégrale pour le cas  $L = 1$ . On a dans ce cas :

$$I_{\text{fin}}^\mu = \Gamma(N) \int_0^1 \prod_{k=1}^N dz_k \delta(1 - \sum_{j=1}^N z_j) \int \frac{d^n l}{i\pi^{n/2}} \frac{l^\rho (\mathcal{T}_{ab}^{\mu\rho} + 2 \sum_{i=1}^N z_i \Delta_{bi}^\rho \mathcal{V}_a^\mu) + \mathcal{V}_a^\mu (l^2 + R^2)}{(l^2 - R^2)^N} . \quad (3.45)$$

Le premier terme est nul puisqu'il ne contient qu'une puissance impaire de  $l$ . Le deuxième terme peut être calculé en utilisant l'équation (2.42). Pour obtenir  $I^\mu$ , on ajoute à  $I_{\text{fin}}^\mu$  la partie réduite ( $I_{\text{div}}^\mu$ ), et on trouve :

$$I^\mu = (N - n - 1) \mathcal{V}_a^\mu J_N^{n+2}(\mathcal{A}) - \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \mathcal{S}_{jk}^{-1} \Delta_{ka}^\mu \int \frac{d^n k}{i\pi^{n/2}} \frac{q_j^2}{\prod_{i=1}^N q_i^2} , \quad (3.46)$$

où le terme de gauche représente la partie finie, et le terme de droite contient des divergences infrarouges.  $J_N^{n+2}$  est une intégrale à 6 dimensions donnée par :

$$J_N^{n+2}(\mathcal{A}) = (-1)^N \Gamma(N - (n+2)/2) \int_0^1 \prod_{k=1}^N dz_k \delta(1 - \sum_{j=1}^N z_j) (R^2 - i\lambda)^{(n+2)/2-N} , \quad (3.47)$$

où  $\mathcal{A}$  est un ensemble d'arguments correspondant aux impulsions des pattes externes.

On peut effectuer le même calcul pour une intégrale tensorielle de rang 2. On utilise encore la méthode de soustraction (3.19) et, par un calcul similaire, on obtient :

$$\begin{aligned} I^{\mu\nu} &= \int \frac{d^n k}{i\pi^{n/2}} \frac{q_a^\mu q_b^\nu}{\prod_{i=1}^N q_i^2} \\ &= \left( -\frac{1}{2} \mathcal{T}_{ab}^{\mu\nu} J_N^{n+2}(\mathcal{A}) + (N-2-n) \sum_{i=1}^N J_N^{n+2}(z_i, \mathcal{A}) \Delta_{ai}^\mu \mathcal{V}_b^\nu \right) \\ &\quad - \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \mathcal{S}_{jk}^{-1} \Delta_{kb}^\nu \int \frac{d^n k}{i\pi^{n/2}} \frac{q_j^2 q_a^\mu}{\prod_{i=1}^N q_i^2} . \end{aligned} \quad (3.48)$$

Ce résultat fait intervenir des intégrales à 6 dimensions avec un paramètre de Feynman. On définit les intégrales à 6 dimensions avec  $m$  paramètres de Feynman :

$$\begin{aligned} J_N^{n+2}(z_{i_1}, \dots, z_{i_m}; \mathcal{A}) &= (-1)^N \Gamma(N - (n+2)/2) \times \\ &\quad \int_0^1 \prod_{k=1}^N dz_k \delta(1 - \sum_{j=1}^N z_j) z_{i_1} \dots z_{i_m} (R^2 - i\lambda)^{(n+2)/2-N} . \end{aligned} \quad (3.49)$$

De même, pour une intégrale tensorielle de rang 3, on obtient :

$$\begin{aligned} I^{\mu\nu\rho} &= \int \frac{d^n k}{i\pi^{n/2}} \frac{q_a^\mu q_b^\nu q_c^\rho}{\prod_{i=1}^N q_i^2} \\ &= \left[ -\frac{1}{2} (N-3-n) g^{\mu\nu} \mathcal{V}_c^\rho J_N^{n+4}(\mathcal{A}) \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N J_N^{n+2}(z_k, \mathcal{A}) \left( \mathcal{T}_{ac}^{\mu\rho} \Delta_{bk}^\nu + \mathcal{T}_{bc}^{\nu\rho} \Delta_{ak}^\mu \right) \\ &\quad + (N-3-n) \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N J_N^{n+2}(z_j, z_k, \mathcal{A}) \Delta_{aj}^\mu \Delta_{bk}^\nu \mathcal{V}_c^\rho \Big] \\ &\quad - \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \mathcal{S}_{jk}^{-1} \Delta_{kc}^\rho \int \frac{d^n k}{i\pi^{n/2}} \frac{q_j^2 q_a^\mu q_b^\nu}{\prod_{i=1}^N q_i^2} , \end{aligned} \quad (3.50)$$

qui fait intervenir des intégrales à 6 et 8 dimensions avec zéro, un ou deux paramètres de Feynman.

Pour une intégrale de rang 4, on a :

$$\begin{aligned}
I^{\mu\nu\rho\sigma} &= \int \frac{d^n k}{i\pi^{n/2}} \frac{q_a^\mu q_b^\nu q_c^\rho q_d^\sigma}{\prod_{i=1}^N q_i^2} \\
&= \left[ \frac{1}{4} J_N^{n+4}(\mathcal{A}) (g^{\mu\nu} \mathcal{T}_{cd}^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} \mathcal{T}_{bd}^{\nu\sigma} + g^{\nu\rho} \mathcal{T}_{ad}^{\mu\sigma}) \right. \\
&\quad - \frac{1}{2} (N-4-n) \sum_{j=1}^N J_N^{n+4}(z_j, \mathcal{A}) (g^{\mu\nu} \Delta_{cj}^\rho + g^{\mu\rho} \Delta_{bj}^\nu + g^{\nu\rho} \Delta_{aj}^\mu) \mathcal{V}_d^\sigma \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N J_N^{n+2}(z_j, z_k, \mathcal{A}) (\mathcal{T}_{ad}^{\mu\sigma} \Delta_{bj}^\nu \Delta_{ck}^\rho + \mathcal{T}_{bd}^{\nu\sigma} \Delta_{aj}^\mu \Delta_{ck}^\rho + \mathcal{T}_{cd}^{\rho\sigma} \Delta_{aj}^\mu \Delta_{bk}^\nu) \\
&\quad + (N-4-n) \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N J_N^{n+2}(z_j, z_k, z_l, \mathcal{A}) \Delta_{aj}^\mu \Delta_{bk}^\nu \Delta_{cl}^\rho \mathcal{V}_d^\sigma \Big] \\
&\quad - \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \mathcal{S}_{jk}^{-1} \Delta_{kd}^\sigma \int \frac{d^n k}{i\pi^{n/2}} \frac{q_j^2 q_a^\mu q_b^\nu q_c^\rho}{\prod_{i=1}^N q_i^2},
\end{aligned} \tag{3.51}$$

avec cette fois-ci jusqu'à 3 paramètres de Feynman dans les intégrales à 6 ou 8 dimensions.

On peut utiliser la même procédure pour les intégrales de rang supérieur. On pourra se reporter aux annexes C, D et E pour le calcul détaillé des intégrales tensorielles de rangs 3, 4 et 5.

On remarque que ce formalisme de réduction nous a conduit à des formules de réduction ne faisant pas intervenir explicitement  $1/\det(G)$ , sources de divergences factices. Il s'agit là d'un des avantages de cette méthode.

### 3.4 Réduction des intégrales à $D$ dimensions

Nous venons de voir que pour calculer les intégrales tensorielles, il est nécessaire de connaître les intégrales à 3 ou 4 points de 6 ou 8 dimensions avec ou sans paramètres de Feynman. En réalité, nous n'avons pas à calculer toutes ces intégrales, et on peut trouver des relations entre elles. Par exemple, pour les intégrales à 4 points, la seule intégrale à calculer explicitement est l'intégrale à 6 dimensions sans paramètre de Feynman.

Par souci de rigueur, introduisons ici la notion de *liste*. Dans le cas d'une boucle avec  $N$  propagateurs internes, les labels leur correspondant forment une liste ordonnée  $S = \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$ , où les  $n_i$  sont les valeurs des labels comprises entre 1 et  $N$ . On notera  $p(i, S)$  la position du label  $i$  dans la liste  $S$ . De plus, on notera  $S - \{i\}$  la nouvelle liste

formée en enlevant l'élément  $i$  de la liste  $S$  et en préservant l'ordre.

On peut écrire les intégrales à  $D$  dimensions avec plusieurs paramètres de Feynman en fonction d'intégrales à  $D$  dimensions avec moins de paramètres de Feynman.

Exemple : pour des boucles à 4 points, il existe une relation qui nous permet d'obtenir une intégrale à 6 dimensions avec un paramètre de Feynman en fonction d'intégrales à 6 dimensions sans paramètre de Feynman et d'intégrales à 3 points.

Pour ce faire, on peut contracter le tenseur  $I^{\mu\nu}(S)$  avec  $\Delta_{tt-1}^\nu$ , où les indices  $t$  et  $t-1$  appartiennent à la liste  $S$ . Pour cela, on utilise la définition de  $I^{\mu\nu}(S)$  et la formule :

$$q_a \cdot \Delta_{tt-1} = \frac{1}{2} [q_t^2 - q_{t-1}^2 - (\mathcal{S}^{[S]}_{at} - \mathcal{S}^{[S]}_{at-1})] . \quad (3.52)$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} I^{\mu\nu}(S) \Delta_{tt-1}^\nu &= \frac{1}{2} \int \frac{d^n k}{i\pi^{n/2}} \frac{q_t^2 q_a^\mu}{\prod_{i \in S} q_i^2} - \frac{1}{2} \int \frac{d^n k}{i\pi^{n/2}} \frac{q_{t-1}^2 q_a^\mu}{\prod_{i \in S} q_i^2} \\ &\quad - \frac{1}{2} (\mathcal{S}^{[S]}_{bt} - \mathcal{S}^{[S]}_{bt-1}) \int \frac{d^n k}{i\pi^{n/2}} \frac{q_a^\mu}{\prod_{i \in S} q_i^2} . \end{aligned} \quad (3.53)$$

On peut aussi contracter  $\Delta_{tt-1}^\nu$  avec le résultat du calcul de  $I^{\mu\nu}(S)$  (équation (3.48)). On utilise les relations suivantes :

$$\mathcal{T}^{[S]\mu\nu}_{ab} \Delta_{cd}^\mu = (\mathcal{S}^{[S]}_{ac} - \mathcal{S}^{[S]}_{ad}) \mathcal{V}^{[S]\nu}_b , \quad (3.54)$$

$$\mathcal{V}^{[S]\mu}_a \Delta_{cd}^\mu = \frac{1}{2} B^{[S]} (\mathcal{S}^{[S]}_{ac} - \mathcal{S}^{[S]}_{ad}) , \quad (3.55)$$

$$\mathcal{C}^{[S]\mu}_{ja} \Delta_{cd}^\mu = \frac{1}{2} [\delta_{jd} - \delta_{jc} + b_j^{[S]} (\mathcal{S}^{[S]}_{ac} - \mathcal{S}^{[S]}_{ad})] . \quad (3.56)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} I^{\mu\nu}(S) \Delta_{tt-1}^\nu &= -\frac{1}{2} \mathcal{V}^{[S]\mu}_a (\mathcal{S}^{[S]}_{bt} - \mathcal{S}^{[S]}_{bt-1}) J_4^6(\mathcal{A}_S) \\ &\quad - B^{[S]} (\mathcal{S}^{[S]}_{bt} - \mathcal{S}^{[S]}_{bt-1}) \sum_{j \in S} J_4^6(z_j; \mathcal{A}_S) \Delta_{aj}^\mu \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[ \int \frac{d^n k}{i\pi^{n/2}} \frac{q_{t-1}^2 q_a^\mu}{\prod_{i \in S} q_i^2} - \int \frac{d^n k}{i\pi^{n/2}} \frac{q_t^2 q_a^\mu}{\prod_{i \in S} q_i^2} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j \in S} b_j^{[S]} (\mathcal{S}^{[S]}_{bt} - \mathcal{S}^{[S]}_{bt-1}) \int \frac{d^n k}{i\pi^{n/2}} \frac{q_j^2 q_a^\mu}{\prod_{i \in S} q_i^2} \right] . \end{aligned} \quad (3.57)$$

Les équations (3.53) et (3.57) doivent être égales. On les divise par  $(\mathcal{S}^{[S]}_{bt} - \mathcal{S}^{[S]}_{bt-1})$ , et on obtient :

$$B^{[S]} \sum_{j \in S} J_4^6(z_j; \mathcal{A}_S) \Delta_{aj}^\mu + \mathcal{V}^{[S]}{}^\mu J_4^6(\mathcal{A}_S) = -\frac{1}{2} \sum_{j \in S} \sum_{k \in S} \mathcal{S}^{[S]-1}_{jk} \Delta_{ka}^\mu \int \frac{d^n k}{i \pi^{n/2}} \frac{q_j^2}{\prod_{i \in S} q_i^2} - \frac{1}{2} \sum_{j \in S} b_j^{[S]} \int \frac{d^n k}{i \pi^{n/2}} \frac{q_j^2 q_a^\mu}{\prod_{i \in S} q_i^2} . \quad (3.58)$$

On utilise la formule (C.4) pour réduire la dernière intégrale. Comme les vecteurs  $\Delta$  sont linéairement indépendants, on trouve finalement :

$$J_4^6(z_l; \mathcal{A}_S) = \frac{1}{B^{[S]}} \left\{ b_l^{[S]} J_4^6(\mathcal{A}_S) + \frac{1}{2} \sum_{j \in S} \mathcal{S}^{[S]-1}_{jl} J_3^n(\mathcal{A}_{S-\{j\}}) - \frac{1}{2} \sum_{j \in S-\{l\}} b_j^{[S]} J_3^n(z_{p(l, S-\{j\})}; \mathcal{A}_{S-\{j\}}) \right\} , \quad (3.59)$$

où  $J_3^n$  est une intégrale à 3 points (voir annexe C), définie comme :

$$J_3^n(\mathcal{A}_S) = - \int_0^1 \prod_{k=1}^3 dz_k \delta(1 - \sum_{j=1}^3 z_j) (R^2 - i\lambda)^{n/2-3} . \quad (3.60)$$

Ainsi, on a réduit une intégrale à 6 dimensions avec un paramètre de Feynman en fonction d'intégrales à 6 dimensions sans paramètre de Feynman et d'intégrales à 3 points. On peut de la même manière réduire des intégrales à 6 dimensions avec  $p$  paramètres de Feynman en fonction d'intégrales à 6 dimensions avec  $p-1$  (ou moins) paramètres de Feynman et d'intégrales à 3 points. On trouvera ces relations dans l'annexe D.

On peut aussi s'intéresser aux intégrales à 8 dimensions. Le nombre de paramètres de Feynman dans ces intégrales peut être réduit avec la même méthode que pour les intégrales à 6 dimensions. Une intégrale à 8 dimensions sans paramètre de Feynman peut ensuite être reliée aux intégrales à 6 dimensions. On se reportera aussi à l'annexe D.

Nous avons vu apparaître dans l'équation (3.59) des coefficients  $1/B^{[S]} \propto 1/\det(G)$ .  $J_4^6$  est cependant une intégrale finie. Donc, si  $\det(G)$  s'annule, le numérateur s'annule aussi, et le résultat reste fini.

Pour ne pas causer d'instabilités numériques, il faut faire attention à ne pas ajouter explicitement de facteurs en  $1/B$ , qui seraient alors des sources de divergences factices. Ainsi, la stratégie à suivre avant d'utiliser les relations de réduction (par exemple, l'équation (3.59)), est d'abord d'essayer de factoriser  $B$  au numérateur et de mettre en évidence explicitement les compensations.

Nous avons mis au point dans ce chapitre des formules de réduction pour les intégrales



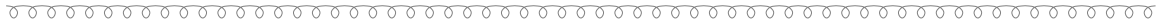
scalaires et tensorielles. Notons que ce formalisme nous a permis d'obtenir également des formules reliant les intégrales de dimensions supérieures sans grand effort, contrairement aux méthodes existant dans la littérature.

---

# Bibliographie

- [1] Z. Bern, L.J. Dixon et D.A. Kosower, “Dimensionally regulated one loop integrals”, Phys. Lett. B 302 (1993), 299 [Erratum-ibid. B 318 (1993), 649].
- [2] Z. Bern, L. Dixon et D.A. Kosower, “Dimensionally regulated pentagon integrals”, Nucl. Phys. B 412 (1994), 751.
- [3] O.V. Tarasov, “Connection between Feynman integrals having different values of the space-time dimension”, Phys. Rev. D 54 (1996), 6479.
- [4] J. Fleischer, F. Jegerlehner et O.V. Tarasov, “Algebraic reduction of one loop Feynman graph amplitudes”, Nucl. Phys. B 566 (2000), 423.
- [5] T. Binoth, J.-P. Guillet et G. Heinrich, “Reduction formalism for dimensionally regulated one-loop N-point integrals”, Nucl. Phys. B 572 (2000), 361.
- [6] A. Ben-Israel et T.N.E. Greville, “Generalized Inverses”, Wiley (1974).





---

## Chapitre 4

# Calcul des amplitudes : vers une automatisatisation

---

### 4.1 Introduction

Les futurs collisionneurs hadroniques nous conduiront jusqu'à l'échelle du TeV. A cause des hautes énergies en jeu, les états finals seront extrêmement complexes, et de multiples réactions avec plusieurs particules externes dans l'état final seront générées.

Lorsqu'on cherche à calculer l'amplitude de tels processus multi-particules, d'une part le nombre de diagrammes de Feynman devient très élevé, et d'autre part, la structure non-abélienne des vertex conduit à une explosion du nombre de termes générés, et les techniques standards de calcul deviennent inutilisables. De manière à contourner le problème, nous avons construit des outils basés d'une part sur la réduction des intégrales de boucle (voir chapitre 3) et d'autre part sur la méthode "Amplitude d'Hélicité" (voir chapitre 2), qui permet d'obtenir des expressions plus condensées, et donc plus faciles à manipuler.

En travaillant dans l'approximation NLO, on doit combiner les corrections réelles et virtuelles et compenser les divergences infrarouges. Le calcul des corrections virtuelles reste très compliqué si le nombre de particules externes est supérieur à quatre, ou si les particules sont massives. Il existe à ce jour plusieurs codes automatiques pour calculer les amplitudes réelles (tels que GRACE [1] ou CompHEP [2]), et il serait très intéressant de développer un code automatique permettant aussi le calcul des amplitudes virtuelles, qui est bien plus compliqué.

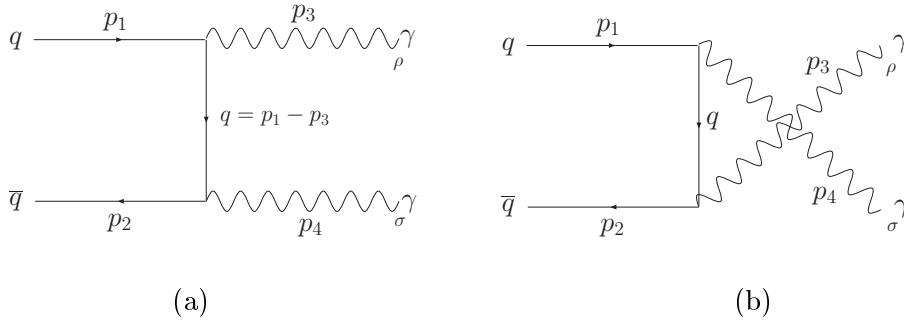
Dans ce chapitre, nous considérons l'exemple relativement simple d'une boucle à 4 points.

## 4.2 La méthodologie au travers d'un exemple : réaction $q\bar{q} \longrightarrow \gamma\gamma$ à une boucle

### 4.2.1 Problématique

De manière à construire les bases de la méthodologie et du formalisme, on va tout d'abord s'intéresser à un calcul simple : celui de la réaction  $q\bar{q} \longrightarrow \gamma\gamma$ . Une fois que nous aurons calculé la section efficace partonique de cette réaction, le modèle des partons nous permettra d'obtenir la section efficace hadronique totale. Ainsi, cette réaction partonique pourra être utilisée pour le calcul de  $p\bar{p} \longrightarrow \gamma\gamma + X$ .

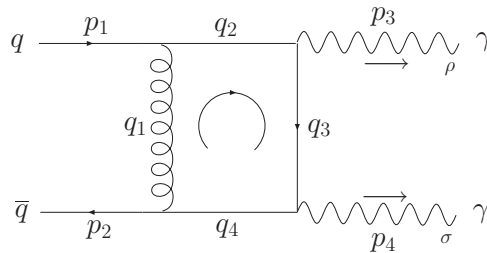
Les diagrammes concernés sont les suivants :

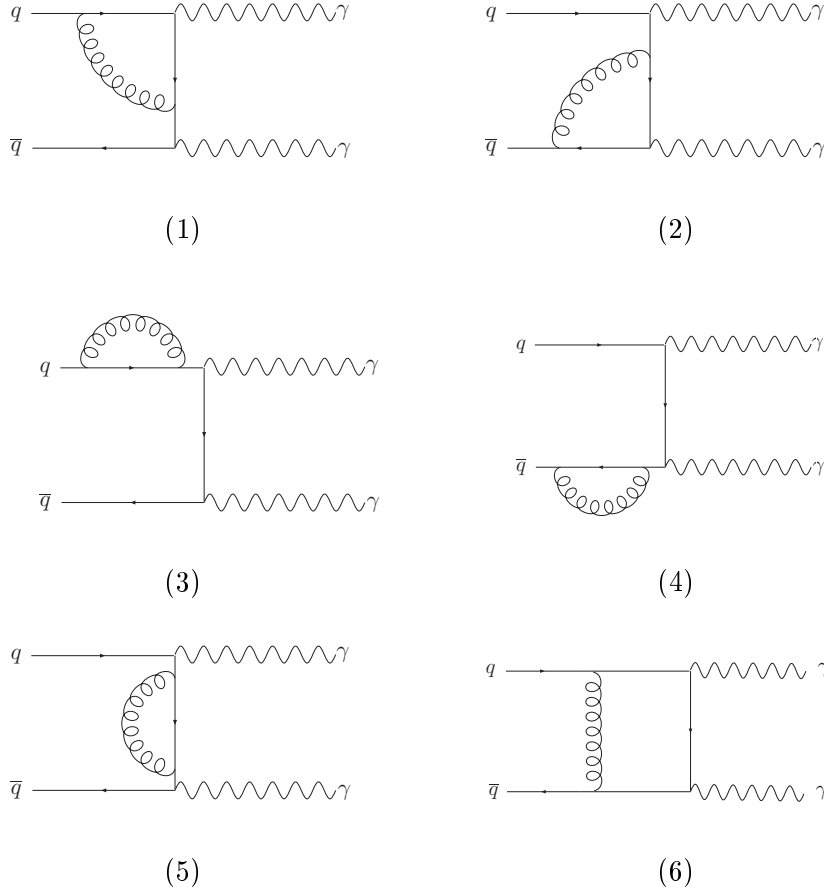


On peut écrire les corrections au diagramme (a), qui sont présentées sur la figure (4.1). Les corrections au diagramme (b) s'écrivent de la même manière.

Le calcul des amplitudes (1) à (5) de la figure (4.1) représente un cas d'école que nous ne détaillerons pas ici. Nous allons par contre nous intéresser à l'amplitude (6), qui correspond au calcul d'une boucle à 4 points. Dans ce chapitre, nous allons présenter sans entrer dans les détails les étapes et les points principaux de ce calcul.

Précisons les données du calcul sur le diagramme (6) :




 FIG. 4.1 – Corrections à  $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$ .

L'amplitude associée à ce diagramme s'écrit, dans la jauge de Feynman ( $\xi = 1$ ) :

$$\mathcal{M}_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = K \int \frac{d^n k}{(2\pi)^4} \frac{1}{q_1^2 q_2^2 q_3^2 q_4^2} \bar{v}_{\lambda_2}(p_2) \gamma^\mu \not{q}_4 \not{q}^{\lambda_4}(p_4) \not{q}_3 \not{q}^{\lambda_3}(p_3) \not{q}_2 \gamma_\mu u_{\lambda_1}(p_1) , \quad (4.1)$$

où  $\lambda_i$  dénote la polarisation ( $\pm 1$ ), et les  $q_i$  sont les impulsions internes.  $K$  est un facteur s'écrivant :

$$K = -e^2 e_q^2 g^2 \mu^{4(2-n)} (T^a T^a)_{ji} , \quad (4.2)$$

où  $e_q$  est la charge du quark. La méthode que nous allons suivre ici a été implémentée et testée dans le langage de manipulation symbolique FORM [3]. Nous avons donc mis au point un code informatique qui pourra servir de base à des calculs plus complexes (voir chapitre 5).

### 4.2.2 Application de la méthode Amplitude d'hélicité

On définit la fonction :

$$S(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \bar{v}_{\lambda_2}(p_2) \gamma^\mu \not{q}_4 \not{q}^{\lambda_4}(p_4) \not{q}_3 \not{q}^{\lambda_3}(p_3) \not{q}_2 \gamma_\mu u_{\lambda_1}(p_1) . \quad (4.3)$$

On peut relier  $\bar{v}_{\lambda_2}$  et  $u_{\lambda_1}$  aux  $\bar{v}$  et  $u$  habituels :

$$u_{\lambda_1}(p_1) = (1 + \lambda_1 \gamma_5) u(p_1) , \quad (4.4)$$

$$\bar{v}_{\lambda_2}(p_2) = \bar{v}(p_2) (1 + \lambda_2 \gamma_5) . \quad (4.5)$$

Lorsqu'on remplace ces expressions dans  $S$  et qu'on utilise les propriétés de commutation des matrices  $\gamma^\mu$  et  $\gamma_5$  :

$$\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0 , \quad (4.6)$$

on obtient :

$$S(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \bar{v}(p_2) \gamma^\mu \not{q}_4 \not{q}^{\lambda_4}(p_4) \not{q}_3 \not{q}^{\lambda_3}(p_3) \not{q}_2 \gamma_\mu (1 - \lambda_2 \gamma_5) (1 + \lambda_1 \gamma_5) u(p_1) . \quad (4.7)$$

Une astuce calculatoire peut permettre d'éviter le calcul de certaines configurations d'hélicités. En effet, on remarque dans  $S$  la présence d'un terme

$$(1 + \lambda_1 \gamma_5)(1 - \lambda_2 \gamma_5) = (1 - \lambda_1 \lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2) \gamma_5 . \quad (4.8)$$

On peut remarquer que si  $\lambda_1 = \lambda_2$ , ce terme est nul. On a donc :

$$S(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_3, \lambda_4) = S(-\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4) = 0 . \quad (4.9)$$

On peut écrire  $u_{\lambda_1}$  et  $\bar{v}_{\lambda_2}$  sous la forme [4] :

$$u_{\lambda_1}(p_1) = |p_1, \lambda_1\rangle , \quad (4.10)$$

$$\bar{v}_{\lambda_2}(p_2) = \langle p_2, -\lambda_2| . \quad (4.11)$$

On a alors

$$S(\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4) = \langle p_2, \lambda_1 | \gamma^\mu \not{q}_4 \not{q}^{\lambda_4}(p_4) \not{q}_3 \not{q}^{\lambda_3}(p_3) \not{q}_2 \gamma_\mu | p_1, \lambda_1 \rangle . \quad (4.12)$$

On utilise l'identité de Kahane–Chisholm [5]

$$\gamma^\mu \Gamma \gamma_\mu = -2\tilde{\Gamma} , \quad (4.13)$$

où  $\Gamma$  est une chaîne de spineurs avec un nombre impair de matrices  $\gamma$ , et  $\tilde{\Gamma}$  est cette même chaîne écrite dans l'ordre inverse. On trouve :

$$S(\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4) = -2 \langle p_2, \lambda_1 | \not{q}_2 \not{q}^{\lambda_3}(p_3) \not{q}_3 \not{q}^{\lambda_4}(p_4) \not{q}_4 | p_1, \lambda_1 \rangle . \quad (4.14)$$

On définit les vecteurs de polarisation  $\epsilon$  selon la méthode amplitude d'hélicité (voir chapitre 2) et on obtient :

$$S(\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4) = -2\langle p_2, \lambda_1 | \not{q}_2 N(\lambda_3, r_3, p_3) [ |p_3, -\lambda_3\rangle \langle r_3, -\lambda_3| + |r_3, \lambda_3\rangle \langle p_3, \lambda_3| ] \not{q}_3 \\ N(\lambda_4, r_4, p_4) [ |p_4, -\lambda_4\rangle \langle r_4, -\lambda_4| + |r_4, \lambda_4\rangle \langle p_4, \lambda_4| ] \not{q}_4 |p_1, \lambda_1\rangle \quad (4.15)$$

avec

$$N(\lambda, r, p) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{\langle r p \rangle} & \lambda = +1 \\ \frac{\sqrt{2}}{\langle r p \rangle^*} & \lambda = -1 \end{cases} \quad (4.16)$$

On développe (4.15), et on utilise les propriétés :

$$\langle q + | \Gamma | q' - \rangle = 0 \quad , \quad (4.17)$$

$$\langle q - | \Gamma | q' + \rangle = 0 \quad . \quad (4.18)$$

Intéressons nous par exemple au cas où

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_3 = -\lambda_4 = +1 \quad .$$

L'équation (4.15) donne :

$$S(+, -, +, -) = -\frac{4}{\langle r_3 p_3 \rangle \langle r_4 p_4 \rangle^*} \langle p_2 + | \not{q}_2 | r_3 + \rangle \langle p_3 + | \not{q}_3 | p_4 + \rangle \langle r_4 + | \not{q}_4 | p_1 + \rangle \quad . \quad (4.19)$$

Pour faire apparaître des produits scalaires en  $q_i$ , on utilise la relation :

$$\not{q}_i = \frac{1}{2(k_1 \cdot k_2)} [2(q_i \cdot k_2) \not{k}_1 + 2(q_i \cdot k_1) \not{k}_2 - \not{k}_1 \not{q}_i \not{k}_2 - \not{k}_2 \not{q}_i \not{k}_1] \quad , \quad (4.20)$$

où  $k_1$  et  $k_2$  sont des quadri-vecteurs arbitraires. On se retrouve alors avec 64 termes, que nous ne détaillerons plus ici.

On peut maintenant choisir les vecteurs arbitraires.  $r_3$  et  $r_4$  peuvent être choisis égaux à  $p_1$  ou  $p_2$  sans risque d'annuler le dénominateur. La seule contrainte sur  $k_1$  est qu'il soit différent de  $k_2$ . On peut limiter le nombre de termes générés en prenant  $r_3 = r_4 = k_2 = p_1$  et  $k_1 = p_2$ .

On peut alors concaténer les produits spinoriels en utilisant les formules suivantes, dérivées à partir de l'article [6] :

$$|p-\rangle \langle q+| = \frac{\not{p} \not{q}}{\langle pq \rangle} \Pi_- \quad , \quad (4.21)$$

$$|p+\rangle \langle q-| = -\frac{\not{p} \not{q}}{\langle pq \rangle^*} \Pi_+ \quad , \quad (4.22)$$

$$|p-\rangle \langle q-| = \frac{\not{p} \not{q}}{\langle p- | \not{q} | q- \rangle} \Pi_+ \quad , \quad (4.23)$$

$$|p+\rangle \langle q+| = \frac{\not{p} \not{q}}{\langle p+ | \not{q} | q+ \rangle} \Pi_- \quad . \quad (4.24)$$

On notera aussi que :

$$\Pi_{\pm}|p_i \mp\rangle = 0 , \quad (4.25)$$

$$\Pi_{\pm}|p_i \pm\rangle = |p_i \pm\rangle . \quad (4.26)$$

On simplifie les produits spinoriels à l'aide des formules suivantes :

$$\langle p_- | k_1 \dots k_n | q_+ \rangle = -\langle q_- | k_n \dots k_1 | p_+ \rangle \quad (n \text{ pair}) , \quad (4.27)$$

$$\langle p_+ | k_1 \dots k_n | q_- \rangle = -\langle q_+ | k_n \dots k_1 | p_- \rangle \quad (n \text{ pair}) , \quad (4.28)$$

$$\langle p_+ | k_1 \dots k_n | q_+ \rangle = \langle q_- | k_n \dots k_1 | p_- \rangle \quad (n \text{ impair}) . \quad (4.29)$$

A partir du théorème de Fierz [7], on peut aussi montrer que :

$$\langle p_+ | \gamma_\mu | q_+ \rangle \langle r_- | \gamma^\mu | s_- \rangle = 2 \langle p_+ | s_- \rangle \langle r_- | q_+ \rangle , \quad (4.30)$$

ce qui peut se réarranger sous la forme :

$$\langle p_- | q_+ \rangle \langle r_- | s_+ \rangle = \langle p_- | s_+ \rangle \langle r_- | q_+ \rangle + \langle p_- | r_+ \rangle \langle q_- | s_+ \rangle . \quad (4.31)$$

Après avoir simplifié en utilisant les formules ci-dessus, on remplace les  $q_i$  par leurs valeurs :

$$q_1 = k , \quad (4.32)$$

$$q_2 = k + p_1 , \quad (4.33)$$

$$q_3 = k - p_2 + p_4 , \quad (4.34)$$

$$q_4 = k - p_2 . \quad (4.35)$$

Si plus d'un  $k$  est sandwiché à l'intérieur des produits spinoriels, on les réordonne de manière à pouvoir sortir les  $k$  sous la forme de produits scalaires, en utilisant :

$$\not{k} \not{p} = 2 k \cdot p - \not{p} \not{k} , \quad (4.36)$$

$$\not{k} \not{k} = k^2 . \quad (4.37)$$

Ces produits scalaires peuvent être réécrits de manière à faire apparaître des  $q_i^2$  au numérateur :

$$p_1 \cdot k = \frac{1}{2} q_2^2 - \frac{1}{2} q_1^2 , \quad (4.38)$$

$$p_2 \cdot k = \frac{1}{2} q_1^2 - \frac{1}{2} q_4^2 , \quad (4.39)$$

$$p_3 \cdot k = \frac{1}{2} q_2^2 - \frac{1}{2} q_3^2 - p_1 \cdot p_3 , \quad (4.40)$$

$$p_4 \cdot k = \frac{1}{2} q_3^2 - \frac{1}{2} q_4^2 + p_2 \cdot p_4 , \quad (4.41)$$

$$k^2 = q_1^2 . \quad (4.42)$$

Ainsi, les  $q_i^2$  du numérateur vont pouvoir se simplifier avec ceux du dénominateur, et le nombre de propagateurs et le rang des intégrales va diminuer. Au final, l'intégrale la plus compliquée va être une intégrale à 4 points et de rang 1 (contre l'intégrale à 4 points de rang 3 de départ) :

$$I_4^\mu = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{q_1^2 q_2^2 q_3^2 q_4^2} . \quad (4.43)$$

### 4.2.3 Calcul des intégrales

Pour calculer l'intégrale (4.43), on utilise la méthode de réduction des intégrales développée au chapitre précédent. En se servant de la formule (3.46), on obtient :

$$I_4^\mu = \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} (3-n) \sum_{i=1}^N b_i \Delta_{ia}^\mu J_4^{n+2}(\mathcal{A}) - \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \mathcal{S}_{jk}^{-1} \Delta_{ka}^\mu \int \frac{d^n k}{i\pi^{n/2}} \frac{q_j^2}{\prod_{i=1}^4 q_i^2} , \quad (4.44)$$

où

$$J_4^{n+2} = \int_0^1 \prod_i dz_i \delta(1 - \sum_i z_i) (R^2)^{n/2-3} , \quad (4.45)$$

et  $\Delta_{ij}^\mu = r_i^\mu - r_j^\mu$ . Les coefficients  $b_i$  peuvent être obtenus à partir de la matrice  $\mathcal{S}_{ij} = (r_i - r_j)^2$ . Dans notre cas, on a  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = p_1$ ,  $r_3 = p_4 - p_2$  et  $r_4 = -p_2$ . Puisque les pattes sont toutes non-massives, la matrice  $\mathcal{S}$  s'écrit simplement :

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2p_2 \cdot p_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2p_1 \cdot p_2 \\ -2p_2 \cdot p_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2p_1 \cdot p_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

Pour obtenir les  $b_i$ , on résout l'équation :

$$\mathcal{S} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

Ainsi :

$$b_1 = b_3 = -\frac{1}{2p_2 \cdot p_4} , \quad (4.48)$$

$$b_2 = b_4 = \frac{1}{2p_1 \cdot p_2} . \quad (4.49)$$

L'équation (4.44) devient alors :

$$\begin{aligned} I_4^\mu &= \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} (3-n) \left( \frac{p_1^\mu - p_2^\mu}{2p_1 \cdot p_2} - \frac{p_4^\mu - p_2^\mu}{2p_2 \cdot p_4} \right) J_4^{n+2}(\mathcal{A}) \\ &\quad + \frac{p_2^\mu}{2p_1 \cdot p_2} I_3(p_2, p_4) - \frac{p_1^\mu}{2p_1 \cdot p_2} I_3(-p_1, -p_3) + \frac{p_4^\mu - p_2^\mu}{2p_2 \cdot p_4} I_3(p_3, -p_4) . \end{aligned} \quad (4.50)$$



On a pris pour convention les notations :

$$I_N^{\mu_1 \dots \mu_L}(p_1, \dots, p_{N-1}) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{k^{\mu_1} \dots k^{\mu_L}}{k^2 \prod_{i=1}^{N-1} (k + p_i)^2} . \quad (4.51)$$

Notons qu'il est toujours possible de se ramener par un changement de variable à une intégrale contenant un  $k^2$  au dénominateur.

On va s'intéresser tout d'abord à l'intégrale  $J_4^{n+2}$ . Etant donnée qu'elle est finie, on prend  $n = 4$ . Le  $R^2$  (défini en (3.7)) s'écrit :

$$R^2 = z_2 z_4 (2p_1 \cdot p_2) - z_1 z_3 (2p_2 \cdot p_4) = s z_2 z_4 + t z_1 z_3 , \quad (4.52)$$

où les  $z_i$  sont des paramètres de Feynman, et  $s$  et  $t$  les variables de Mandelstam. On effectue le changement de variable suivant :

$$z_1 = z x w , \quad (4.53)$$

$$z_2 = z (1 - x) w , \quad (4.54)$$

$$z_3 = (1 - z)(1 - y) w , \quad (4.55)$$

$$z_4 = y (1 - z) w , \quad (4.56)$$

conduisant au déterminant du jacobien  $\det(\mathcal{J}) = -w^2 z(1 - z)$ . On obtient :

$$\begin{aligned} J_4^6 &= \int_0^1 \prod_i dz_i \frac{\delta(1 - \sum_i z_i)}{R^2} \\ &= \int_0^1 dx dy \frac{-1}{s x (1 - y) + t y (1 - x)} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{(s + t)x - t} \left[ \ln\left(\frac{t}{s}\right) + \ln(1 - x) - \ln(x) \right] . \end{aligned} \quad (4.57)$$

En utilisant la définition de la fonction dilogarithme (voir annexe A), et la relation :

$$\int \frac{\ln(a + b x)}{c + e x} dx = \frac{1}{e} \left[ \ln\left(\frac{a e - b c}{e}\right) \ln(c + e x) - Li_2\left(-b \frac{c + e x}{a e - b c}\right) \right] . \quad (4.58)$$

on trouve finalement :

$$J_4^6 = \frac{1}{s + t} \left[ Li_2\left(\frac{-t}{s}\right) + Li_2\left(\frac{-s}{t}\right) - \frac{\pi^2}{3} \right] . \quad (4.59)$$

Il reste donc uniquement à calculer les intégrales à 3 points. On peut montrer que :

$$I_3(p_i, p_j) = -\frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \frac{(n-3)}{(n-4)} \Gamma(2 - n/2) \frac{(2p_i \cdot p_j)^{n/2-2}}{p_i \cdot p_j} . \quad (4.60)$$

Le calcul de  $I_4$  est maintenant terminé.

Les autres intégrales que l'on peut rencontrer lors du calcul de l'amplitude (4.1) sont :

$$I_3^{\mu\nu}(p_i, p_j) = \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \left( \frac{g^{\mu\nu}}{4} \Gamma(2 - n/2) - \frac{1}{2} \Gamma(n/2 - 2) \frac{p_i^\mu p_j^\nu + p_j^\mu p_i^\nu}{2 p_i \cdot p_j} + \frac{1}{2} \frac{p_i^\mu p_j^\nu + p_i^\nu p_j^\mu}{2 p_i \cdot p_j} \right) (2 p_i \cdot p_j)^{n/2-2} , \quad (4.61)$$

$$I_3^\mu(p_i, p_j) = \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \Gamma(2 - n/2) (2 p_i \cdot p_j)^{n/2-2} \frac{p_i^\mu + p_j^\mu}{2 p_i \cdot p_j} , \quad (4.62)$$

$$I_2^\mu(p_i, p_j) = -\frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \Gamma(2 - n/2) (2 p_i \cdot p_j)^{n/2-2} \frac{p_i^\mu + p_j^\mu}{2} , \quad (4.63)$$

$$I_2(p_i, p_j) = \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \Gamma(2 - n/2) (2 p_i \cdot p_j)^{n/2-2} . \quad (4.64)$$

En utilisant toutes ces relations, on obtient, après simplification :

$$S(+, -, +, -) = 2 \frac{\langle p_1 p_4 \rangle}{\langle p_1 p_4 \rangle^*} \frac{\langle p_2 p_3 \rangle^*}{\langle p_1 p_3 \rangle} \frac{s_{12}^2}{s_{14}^2} \left\{ -\frac{4}{\varepsilon_{ir}^2} - 2 \frac{4\gamma + \ln_+}{\varepsilon_{ir}} + \frac{s_{14}(s_{13} - 3s_{12})}{s_{12}^2} \ln_- + \frac{s_{14}^2}{s_{12}^2} - 8\gamma^2 - \gamma \ln_+ - \ln_s + \frac{4}{3} \pi^2 - 2 \left[ Li_2\left(\frac{s_{14}}{s_{12}}\right) + Li_2\left(\frac{s_{12}}{s_{14}}\right) \right] \right\} , \quad (4.65)$$

où

$$\ln_+ = \ln(s_{12}) + \ln(-s_{13}) , \quad (4.66)$$

$$\ln_- = \ln(s_{12}) - \ln(-s_{13}) , \quad (4.67)$$

$$\ln_s = \ln^2(s_{12}) + \ln^2(-s_{13}) . \quad (4.68)$$

Nous venons de voir dans ce chapitre la démarche à entreprendre pour effectuer le calcul d'une amplitude avec la méthode amplitude d'hélicité et en utilisant les formules de réduction des intégrales. Nous avons ainsi pu construire un prototype de code informatique relativement simple, qui servira de base pour la suite.

Dans le chapitre suivant, nous allons mener le calcul beaucoup plus compliqué de l'amplitude d'une boucle à 5 pattes. Le formalisme utilisé restera le même, mais les intégrales seront bien plus complexes et le nombre de termes énormément plus élevé. Il sera alors



nécessaire de développer des méthodes de simplification efficaces. Pour mettre au point un programme automatique de calcul, il faudra veiller à conserver l'aspect général de la méthodologie.

---

# Bibliographie

- [1] F.Yuasa et al., “Automatic Computation of Cross Sections in HEP : Status of GRACE System”, Prog. Theor. Phys. Suppl. 138 (2000), 18.
- [2] A. Pukhov et al., “CompHEP - a package for evaluation of Feynman diagrams and integration over multi-particle phase space. User’s manual for version 33.”, hep-ph/9908288.
- [3] J.A.M. Vermaseren, “New features of FORM”, math-ph/0010025.
- [4] Z. Xu, D. Zhang et L. Chang, “Helicity amplitudes for multiple Bremsstrahlung in massless nonabelian gauge theories”, Nucl. Phys. B291 (1987) 392.
- [5] J. Kahane, “Algorithm for Reducing Contracted Products of  $\gamma$  Matrices”, J. Math. Phys. 9 (1968), 1732.  
J.S.R. Chisholm, “Generalization of the Kahane algorithm for scalar products of  $\lambda$ -matrices”, Comput. Phys. Commun. 4 (1972), 205.
- [6] R. Pittau, “A simple method for multi-leg loop calculations”, Comput. Phys. Commun. 104 (1997), 23.
- [7] R.E. Marshak, F. Riazuddin et C.P. Ryan, “Theory of Weak Interactions in Particle Physics”, John Wiley and Sons (1969), ISBN 0-47-157290-X.



## Chapitre 5

# Application à la réaction $gg \longrightarrow \gamma\gamma g$

### 5.1 Introduction

Les futurs collisionneurs hadroniques sont prioritairement axés sur la recherche de nouvelles particules, en particulier le boson de Higgs. Les canaux  $\gamma\gamma$ ,  $ZZ$  et  $WW$  ont une importance capitale dans cette recherche. En plus de deux photons, nous allons considérer dans la suite la présence d'un jet. Il y a en particulier deux raisons importantes à cela : d'une part, le rapport signal sur bruit de fond est bien meilleur dans le cas de  $\gamma\gamma + \text{jet}$  que dans le cas sans jet. D'autre part, les expérimentateurs de CMS ont besoin de connaître la queue de distribution de production du Higgs pour des impulsions transverses élevées, ce qui nécessite de prendre en compte la présence d'un jet dans les calculs [34].

Ainsi, on considère dans ce chapitre la réaction  $gg \longrightarrow \gamma\gamma g$ . Cette amplitude avait pu être dérivée du résultat de l'amplitude d'une boucle à 5 gluons [19]. Cependant, le calcul direct de cette amplitude reste très intéressant. Il s'agit ici de trouver un formalisme adapté à ce genre de calculs et de réaliser un code généralisable à d'autres réactions, en particulier, à des réactions impliquant des particules massives ( $ZZ$  et  $WW$ ), tout en gardant la possibilité de vérifier les résultats.

Au final, cette amplitude, de par la complexité de son calcul, est un exemple idéal pour mettre en place un formalisme et un code informatique adaptés aux processus multi-particules. On utilisera la méthodologie et les outils mis en place dans les chapitres précédents.

## 5.2 Réaction $gg \rightarrow \gamma\gamma g$

### 5.2.1 Problématique

L'amplitude correspondant à la réaction  $gg \rightarrow \gamma\gamma g$  comprend deux topologies. On peut en effet avoir une boucle avec 5 pattes (trois gluons et deux photons). Cette configuration est appelée *pentagone*. Mais on peut aussi avoir la topologie avec deux gluons couplés, ce qui correspond à une *boîte*. La topologie avec trois gluons couplés est interdite par la conservation de couleur. Les deux topologies sont présentées dans la figure (5.1). Pour obtenir tous les graphes, il faut permuter les cinq pattes. On obtient ainsi, pour une certaine orientation des lignes internes, 18 graphes pour la boîte et 24 pour le pentagone. Pour avoir l'amplitude de chaque configuration d'hélicités, il faut sommer les amplitudes des 42 graphes.

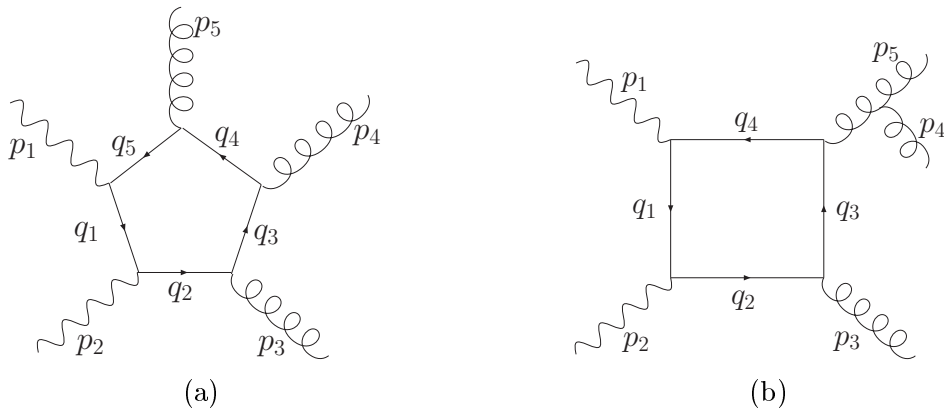


FIG. 5.1 – La réaction gluon + gluon  $\rightarrow$  photon + photon + gluon admet deux topologies : à gauche (a), une topologie dite “pentagone”, et à droite (b) une topologie dite “boîte”. En permutant les pattes, on obtient 24 groupes de graphes pentagones, et 18 groupes de graphes boîtes.

Si l'on souhaite avoir l'amplitude totale non-polarisée, il faut sommer toutes les configurations d'hélicités possibles. On a 5 particules, avec pour chacune deux états d'hélicités possibles ce qui conduit à 32 configurations. A priori il faut calculer tous les graphes, ce qui correspond à 1344 diagrammes différents. Heureusement, on peut profiter des propriétés de symétrie pour réduire le nombre de graphes à calculer. La symétrie de parité nous permet de réduire le nombre de graphes d'un facteur 2.

On a par exemple :

$$\mathcal{A}^{--+++}(1, 2, 3, 4, 5) = \mathcal{A}^{++---}(1, 2, 3, 4, 5) . \quad (5.1)$$

1 et 2 désignent les photons et 3, 4 et 5 les gluons.

Les amplitudes sont aussi symétriques par échange des photons, ou par un “relabeling” cyclique des gluons. A cause de la symétrie de Bose et de la présence de facteurs de couleur, l’amplitude est antisymétrique par échange des gluons. Par exemple :

$$\mathcal{A}^{+++-}(1, 2, 3, 4, 5) = -\mathcal{A}^{+++-}(1, 2, 5, 4, 3) . \quad (5.2)$$

De telles propriétés fournissent aussi de bons outils pour tester les résultats.

Au final, il ne reste que six configurations d’hélicités indépendantes à calculer, qui sont :

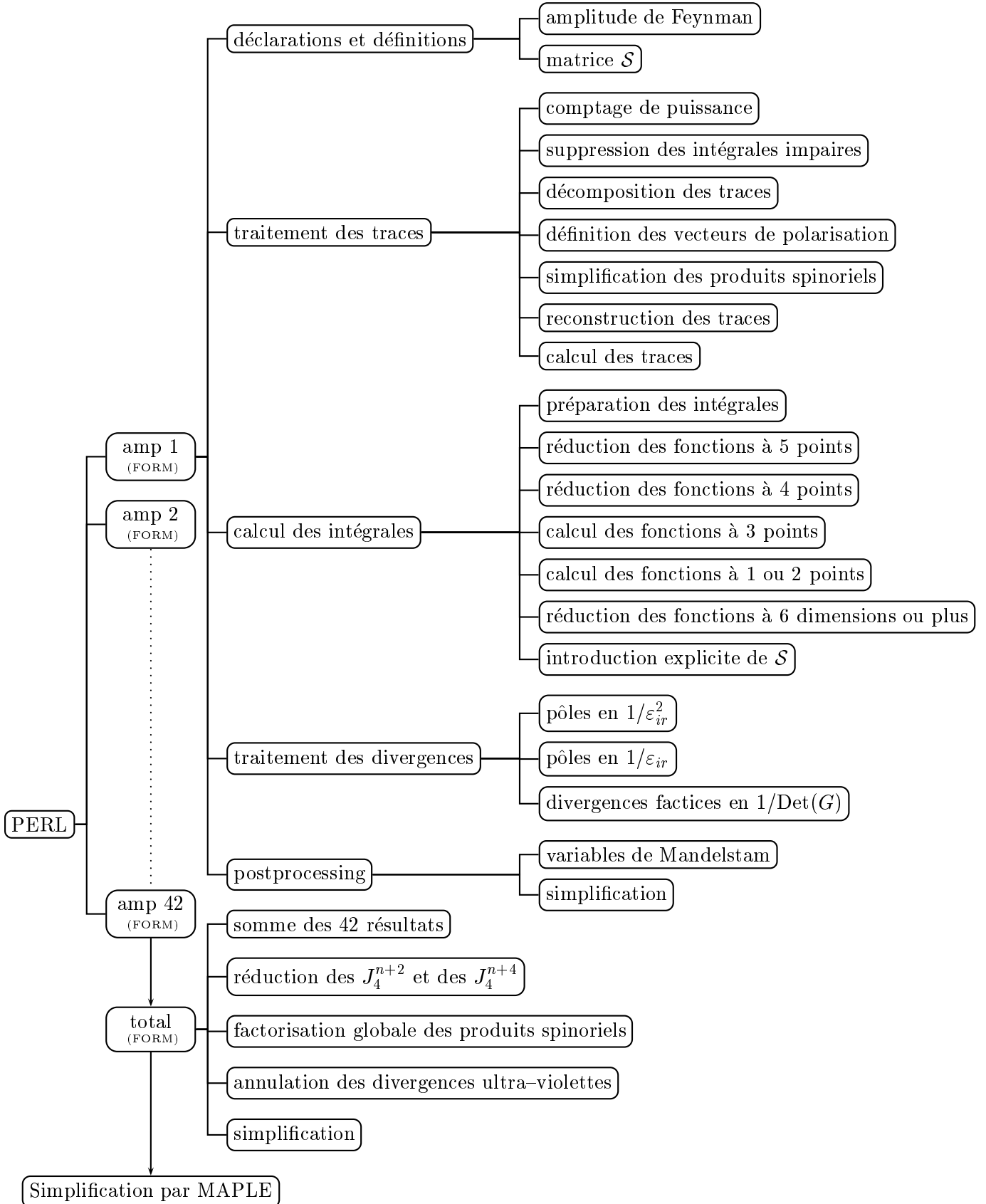
$$\mathcal{A}^{++++}, \mathcal{A}^{-+++}, \mathcal{A}^{+++-}, \mathcal{A}^{--++}, \mathcal{A}^{++-+}, \mathcal{A}^{-++-} .$$

### 5.2.2 Code informatique

Nous avons mis en place un code informatique capable de traiter automatiquement toutes les amplitudes avec les mêmes méthodes. On peut en distinguer deux composantes principales : un programme PERL génère pour chaque configuration d’hélicités 42 programmes écrits dans le langage de manipulations symboliques FORM [29], correspondant aux 42 diagrammes de Feynman. Il y a d’autre part un autre programme FORM qui va sommer ces 42 amplitudes et les simplifier. On obtient ainsi les amplitudes des six configurations d’hélicités indépendantes. Une simplification finale s’effectue par un code MAPLE [33].

Le code informatique complet est résumé dans l’arbre de la page suivante.





Nous allons effectuer maintenant une description détaillée du code de calcul.

### Déclarations et définitions

On considérera que toutes les impulsions externes sont entrantes. Pour retrouver le cas physique, il faudra inverser l'hélicité et le signe des impulsions des particules que l'on souhaite sortantes (voir chapitre suivant).

L'utilisation des règles de Feynman nous permet d'écrire l'amplitude correspondant à chaque diagramme. Par exemple, si l'on considère le diagramme (a) de la figure (5.1), dans le cas où toutes les hélicités sont positives, l'amplitude correspondante vaut :

$$\mathcal{A}_1^{+++++} = g_s^3 e^2 e_q^2 \mu^{5(2-n/2)} \text{Tr}[T^{a_3} T^{a_5} T^{a_4}] \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{\text{Tr}[\not{\epsilon}_1^+ \not{q}_5 \not{\epsilon}_5^+ \not{q}_4 \not{\epsilon}_4^+ \not{q}_3 \not{\epsilon}_3^+ \not{q}_2 \not{\epsilon}_2^+ \not{q}_1]}{q_1^2 q_2^2 q_3^2 q_4^2 q_5^2}, \quad (5.3)$$

où :  $q_i = k + r_i$  ( $k$  étant l'impulsion tournant dans la boucle et  $r_i = p_i + r_{i-1}$ ).

L'amplitude correspondant au diagramme (b) est :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2^{+++++} = & g_s^3 e^2 e_q^2 \mu^{5(2-n/2)} (\text{Tr}[T^{a_3} T^{a_4} T^{a_5}] - \text{Tr}[T^{a_3} T^{a_5} T^{a_4}]) \\ & \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{(p_4 + p_5)^2 q_1^2 q_2^2 q_3^2 q_4^2} (\epsilon_4 \cdot \epsilon_5 \text{Tr}[\not{q}_3 \not{\epsilon}_3^+ \not{q}_2 \not{\epsilon}_2^+ \not{q}_1 \not{\epsilon}_1^+ \not{q}_4 \not{p}_4] \\ & - \epsilon_4 \cdot \epsilon_5 \text{Tr}[\not{q}_3 \not{\epsilon}_3^+ \not{q}_2 \not{\epsilon}_2^+ \not{q}_1 \not{\epsilon}_1^+ \not{q}_4 \not{p}_5] + 2p_5 \cdot \epsilon_4 \text{Tr}[\not{q}_3 \not{\epsilon}_3^+ \not{q}_2 \not{\epsilon}_2^+ \not{q}_1 \not{\epsilon}_1^+ \not{q}_4 \not{\epsilon}_5] \\ & - 2p_4 \cdot \epsilon_5 \text{Tr}[\not{q}_3 \not{\epsilon}_3^+ \not{q}_2 \not{\epsilon}_2^+ \not{q}_1 \not{\epsilon}_1^+ \not{q}_4 \not{\epsilon}_4]) . \end{aligned} \quad (5.4)$$

Dans la partie “Déclarations et définitions” du programme, on définit donc les amplitudes, qui ont été générées automatiquement par une routine PERL. C'est aussi à ce moment que nous spécifions les propriétés de la matrice  $\mathcal{S}$ .

### Traitement des traces

Cette procédure commence par un comptage de puissance. Si l'amplitude est potentiellement divergente en ultra-violet, on considérera les propagateurs internes en  $n$  dimensions. Si non, on restera en 4 dimensions.

Dans le cas où l'on travaille en  $n$  dimensions, pour éviter toute confusion, on sépare la partie en 4 dimensions de la partie en  $n - 4$  dimensions. Ainsi,

$$q_i = k + r_i = \tilde{k} + \hat{k} + r_i = \tilde{k} + \hat{q}_i, \quad (5.5)$$

car les  $r_i$  sont en 4 dimensions. On se retrouve alors avec des intégrales comportant au numérateur un nombre pair ou impair de  $\tilde{k}$ . Comme les intégrales “impaires” sont nulles, on les supprime directement à cette étape.

Deux approches sont alors possibles : soit on calcule directement les traces, et on décide

de traiter ultérieurement les termes générés, soit on commence par appliquer la méthode amplitude d'hélicité et traiter les termes, puis on calcule les traces. Nous avons choisi cette deuxième approche dans le but de limiter le nombre de termes produits.

Ainsi, on débute par la décomposition des traces en produits spinoriels. En suivant la méthode amplitude d'hélicité, on définit les vecteurs de polarisation (voir chapitre 2) et leurs propriétés :

$$\epsilon_i^+ \cdot p_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle r_i - | \not{p}_j | p_i - \rangle}{\langle r_i p_i \rangle} , \quad (5.6)$$

$$\epsilon_i^- \cdot p_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle r_i + | \not{p}_j | p_i + \rangle}{\langle r_i p_i \rangle^*} , \quad (5.7)$$

$$\epsilon_i^+ \cdot \epsilon_j^+ = \frac{\langle r_i r_j \rangle \langle p_i p_j \rangle^*}{\langle r_i p_i \rangle \langle r_j p_j \rangle} , \quad (5.8)$$

$$\epsilon_i^- \cdot \epsilon_j^- = \frac{\langle r_i r_j \rangle^* \langle p_i p_j \rangle}{\langle r_i p_i \rangle^* \langle r_j p_j \rangle^*} , \quad (5.9)$$

$$\epsilon_i^+ \cdot \epsilon_j^- = \frac{\langle r_i p_j \rangle \langle p_i r_j \rangle^*}{\langle r_i p_i \rangle \langle r_j p_j \rangle^*} , \quad (5.10)$$

où les  $r_i$  sont les vecteurs de référence, arbitraires. On les choisit parmi les cinq impulsions externes de manière à réduire le plus possible le nombre de termes.

On simplifie alors au maximum les produits spinoriels avant de recoller les brackets et de reconstruire des traces. On peut cependant remarquer que certains brackets ne forment pas directement de trace. On utilise alors les formules suivantes :

$$|p_- \rangle \langle q_+| = \frac{\not{p} \not{q}}{\langle p q \rangle} \Pi_- , \quad (5.11)$$

$$|p_+ \rangle \langle q_-| = -\frac{\not{p} \not{q}}{\langle p q \rangle^*} \Pi_+ , \quad (5.12)$$

$$|p_- \rangle \langle q_-| = \frac{\not{p} \not{q}}{\langle p_- | \not{q} | q_- \rangle} \Pi_+ , \quad (5.13)$$

$$|p_+ \rangle \langle q_+| = \frac{\not{p} \not{q}}{\langle p_+ | \not{q} | q_+ \rangle} \Pi_- . \quad (5.14)$$

Les vecteurs  $b$  sont des vecteurs arbitraires choisis automatiquement par le programme de manière à éviter les dénominateurs nuls. Après avoir concaténé tous les produits spinoriels des numérateurs sous forme de traces, on effectue le calcul des traces, et on simplifie le résultat.

### Calcul des intégrales

Avant de pouvoir calculer les intégrales, il est nécessaire de les mettre sous une forme adaptée.

On voit en fait apparaître trois types de termes :

- des produits scalaires en  $p_i \cdot p_j$ , que l'on écrit en fonction des éléments de la matrice  $\mathcal{S}$ ,
- des termes en  $p_i \cdot \hat{q}_j$ , pour lesquels on peut utiliser les formules suivantes :

$$\begin{aligned} p_1 \cdot \hat{q}_i &= \hat{q}_1 \cdot \hat{q}_i - \hat{q}_5 \cdot \hat{q}_i \\ p_2 \cdot \hat{q}_i &= \hat{q}_2 \cdot \hat{q}_i - \hat{q}_1 \cdot \hat{q}_i \\ p_3 \cdot \hat{q}_i &= \hat{q}_3 \cdot \hat{q}_i - \hat{q}_2 \cdot \hat{q}_i \\ p_4 \cdot \hat{q}_i &= \hat{q}_4 \cdot \hat{q}_i - \hat{q}_3 \cdot \hat{q}_i \\ p_5 \cdot \hat{q}_i &= \hat{q}_5 \cdot \hat{q}_i - \hat{q}_4 \cdot \hat{q}_i \quad , \end{aligned}$$

- et enfin des produits scalaires  $\hat{q}_i \cdot \hat{q}_j$ . Pour ces termes, on utilise :

$$\hat{q}_i \cdot \hat{q}_j = \frac{1}{2}(\hat{q}_i^2 + \hat{q}_j^2 - \mathcal{S}_{ij}) \quad .$$

On génère ainsi des  $\hat{q}^2$  qui se simplifieront avec les dénominateurs (il faut néanmoins faire attention à la dimension des quadri-vecteurs).

A cette étape s'effectue la réduction des intégrales (voir chapitre 3). Ainsi, les intégrales à 5 et 4 points sont réduites en fonction des intégrales à 3 points et des intégrales finies à 6 ou 8 dimensions ( $J_4^{n+2}$  et  $J_4^{n+4}$ ), avec ou sans paramètres de Feynman.

On réduit aussi le nombre de paramètres de Feynman dans le cas où les  $B^{[S]}$  se factorisent devant les intégrales (voir paragraphe 3.4). Dans le cas contraire, on garde les intégrales en l'état, et on les réduira dans l'amplitude totale.

Les intégrales à 3 points sont alors calculées explicitement selon les conventions de l'annexe C. On donne aussi explicitement les fonctions à 1 ou 2 points.

Un code MAPLE génère l'inverse de la matrice  $\mathcal{S}$  ainsi que tous les coefficients  $b_5^{[S]}$  et  $b_4^{[S-\{i\}]}$ . La matrice  $\mathcal{S}$  à 4 points est obtenue en retirant la ligne et la colonne  $i$  de la matrice  $\mathcal{S}$  à 5 points.

### Traitement des divergences

Les pentagones et les boîtes sont libres de divergences infrarouges, car ils comportent uniquement des lignes internes fermioniques. Par contre, les boîtes sont chacune divergentes en ultra-violet, mais leur somme ne l'est pas. On s'intéresse donc ici aux divergences infrarouges.

Il est important de s'assurer que les divergences infrarouges s'annulent bien, ce qui se fait en deux étapes : pôles en  $1/\varepsilon_{ir}^2$ , puis pôles en  $1/\varepsilon_{ir}$ . Pour cela, on utilise les formules de réduction des fonctions  $H$  (voir annexe C).

Il ne nous reste qu'à mettre en facteur des  $B^{[S]}$  au numérateur pour simplifier ceux qui sont présents au dénominateur et qui sont générateurs de divergences factices.

### Postprocessing

Le calcul de l'amplitude est désormais terminé. On écrit alors les éléments de la matrice  $S$  en fonction des variables de Mandelstam, définies par  $s_{ij} = 2p_i \cdot p_j$ . A part pour la configuration contenant uniquement des polarisations positives, le nombre de termes est important, et ceci en particulier pour les amplitudes avec deux hélicités négatives, à cause de la présence de termes logarithmiques (fonctions à 2 points) et de  $J_4^{n+2}$  (fonctions à 4 points). Il est donc très important de trouver des méthodes de simplification pour réduire au maximum le nombre de termes.

Le résultat de chaque amplitude est alors sauvegardé séparément.

### Amplitude totale

Un code FORM calcule l'amplitude totale pour chaque configuration d'hélicités en sommant les amplitudes des 42 diagrammes.

Un certain nombre de simplifications et de réductions n'étant possibles que dans la somme, elles sont effectuées à cette étape. En particulier, on réduit les fonctions à 6 ou 8 dimensions restantes.

Le résultat contient des produits spinoriels au dénominateur, provenant des équations (5.6) à (5.14). Etant donné que le choix des  $b$  a été effectué automatiquement, les dénominateurs peuvent avoir des formes variées. Néanmoins, ces différentes représentations sont reliées, et l'enjeu est ici de trouver un facteur commun adapté qui puisse s'écrire facilement sous une forme explicitement invariante de jauge. On développera davantage ce point dans la section suivante.

Une fois cette factorisation effectuée, on vérifie que tous les termes ultra-violets se compensent dans l'amplitude totale. On réalise alors une dernière simplification avec FORM, complétée ensuite par une simplification finale par MAPLE.

#### 5.2.3 Représentation invariante de jauge

Nous venons de voir comment on réalise le calcul des amplitudes à l'aide du code informatique. Par exemple, si l'on regarde la configuration avec le photon 1 d'hélicité négative et les autres particules d'hélicités positives  $(- + + + +)$ , pour les vecteurs de référence  $(p_2, p_3, p_2, p_2, p_2)$ , le résultat final apparaît sous la forme :

$$\mathcal{A}^{-++++} = 2\sqrt{2} \frac{A + 4\varepsilon(p_1, p_2, p_3, p_4) B}{\langle p_3 p_2 \rangle \langle p_2 p_3 \rangle \langle p_2 p_4 \rangle \langle p_2 p_5 \rangle \langle p_2 p_1 \rangle^* \langle p_1 + | \not{p}_4 | p_5 + \rangle \langle p_2 + | \not{p}_5 | p_4 + \rangle}, \quad (5.15)$$

où  $A$  et  $B$  sont des combinaisons de variables de Mandelstam. Ce résultat est bien entendu

invariant de jauge, mais cette invariance n'est pas explicite. Il serait donc très intéressant de trouver une autre représentation qui mettrait clairement en évidence les invariances. Pour cela, on utilise les tenseurs de champ électromagnétique définis par :

$$\mathcal{F}_j^{\mu\nu} = p_j^\mu \epsilon_j^\nu - p_j^\nu \epsilon_j^\mu . \quad (5.16)$$

Le but est de relier les produits spinoriels présents dans (5.15) aux tenseurs  $\mathcal{F}$ . En utilisant la relation (5.8), on obtient :

$$\frac{1}{\langle p_3 p_2 \rangle \langle p_2 p_3 \rangle} = \frac{\epsilon_2^+ \cdot \epsilon_3^+}{-s_{23}} . \quad (5.17)$$

On peut aussi utiliser la formule (5.6) :

$$\frac{1}{\langle p_2 p_4 \rangle \langle p_2 p_5 \rangle} = \frac{(\epsilon_4^+ \cdot p_5)(\epsilon_5^+ \cdot p_4)}{\langle p_2 - | \not{p}_5 | p_4 - \rangle \langle p_2 - | \not{p}_4 | p_5 - \rangle} , \quad (5.18)$$

et enfin la formule (5.7) :

$$\frac{1}{\langle p_2 p_1 \rangle^*} = \sqrt{2} \frac{\epsilon_1^- \cdot p_4}{\langle p_2 + | \not{p}_4 | p_1 + \rangle} . \quad (5.19)$$

On peut montrer que :

$$\text{Tr}(\mathcal{F}_2^+ \mathcal{F}_3^+) = -s_{23}(\epsilon_2^+ \cdot \epsilon_3^+) , \quad (5.20)$$

$$\text{Tr}(\mathcal{F}_4^+ \mathcal{F}_5^+) = 2(\epsilon_4^+ \cdot p_5)(\epsilon_5^+ \cdot p_4) , \quad (5.21)$$

$$p_2 \cdot \mathcal{F}_1^- \cdot p_4 = \frac{1}{2}s_{12}(\epsilon_1^- \cdot p_4) . \quad (5.22)$$

En utilisant ces relations, l'équation (5.15) devient :

$$\mathcal{A}^{-++++} = \frac{(A + 4\varepsilon(p_1, p_2, p_3, p_4) B) \text{Tr}(\mathcal{F}_2^+ \mathcal{F}_3^+) \text{Tr}(\mathcal{F}_4^+ \mathcal{F}_5^+) (p_2 \cdot \mathcal{F}_1^- \cdot p_4)}{s_{23}^2 s_{12} \langle p_1 + | \not{p}_4 | p_5 + \rangle \langle p_2 + | \not{p}_5 | p_4 + \rangle \langle p_2 - | \not{p}_5 | p_4 - \rangle \langle p_2 - | \not{p}_4 | p_5 - \rangle \langle p_2 + | \not{p}_4 | p_1 + \rangle} .$$

Par les propriétés des spineurs, il est facile de voir que le dénominateur est constitué de produits scalaires<sup>1</sup>. On obtient donc :

$$\mathcal{A}^{-++++} = \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_2^+ \mathcal{F}_3^+) \text{Tr}(\mathcal{F}_4^+ \mathcal{F}_5^+) (A + 4\varepsilon(p_1, p_2, p_3, p_4) B)}{s_{23}^2 s_{45}^2 s_{14} s_{12} s_{24} s_{25}} (p_2 \cdot \mathcal{F}_1^- \cdot p_4) . \quad (5.23)$$

Il reste maintenant à s'affranchir du tenseur  $\varepsilon$ . Celui-ci peut s'écrire sous la forme :

$$\varepsilon(p_1, p_2, p_3, p_4) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\Pi_- \not{p}_5 \not{p}_1 \not{p}_4 \not{p}_2) - \frac{1}{4} \text{Tr}(\not{p}_5 \not{p}_1 \not{p}_4 \not{p}_2) . \quad (5.24)$$

<sup>1</sup>Lors du calcul de l'amplitude totale, un choix astucieux du facteur global des produits spinoriels peut permettre de trouver plus facilement une forme simple et compacte.

On peut montrer que :

$$\text{Tr}(\Pi_- \not{p}_5 \not{p}_1 \not{p}_4 \not{p}_2) = s_{24}s_{14} \frac{p_2 \cdot F_1^- \cdot p_5}{p_2 \cdot F_1^- \cdot p_4} . \quad (5.25)$$

En définissant :

$$C_A \equiv \frac{A - B \text{Tr}(\not{p}_5 \not{p}_1 \not{p}_4 \not{p}_2)}{s_{14}s_{12}s_{24}s_{25}} , \quad (5.26)$$

et

$$C_B \equiv -\frac{2B}{s_{12}s_{25}} , \quad (5.27)$$

l'amplitude se réécrit :

$$\mathcal{A}^{-++++} = \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_2^+ \mathcal{F}_3^+) \text{Tr}(\mathcal{F}_4^+ \mathcal{F}_5^+)}{s_{23}^2 s_{45}^2} \left( C_A (p_2 \cdot \mathcal{F}_1^- \cdot p_4) - C_B (p_2 \cdot \mathcal{F}_1^- \cdot p_5) \right) . \quad (5.28)$$

Au final, une telle réécriture des résultats permet de faire apparaître explicitement l'invariance de jauge et les symétries. Cela nous a permis de tester tous les résultats en vérifiant leurs symétries.

Ce changement de représentation peut être effectué pour toutes les amplitudes. On se reportera à l'article présenté à la suite de cette section pour connaître les autres résultats.

WUE-ITP-2003-038

LAPTH-1021/03

December 2003

## A compact representation of the $\gamma\gamma ggg \rightarrow 0$ amplitude

T. Binoth<sup>a</sup>, J. Ph. Guillet<sup>b</sup>, F. Mahmoudi<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Institut für Theoretische Physik und Astrophysik  
Universität Würzburg  
Am Hubland  
D-97074 Würzburg, Germany*

<sup>b</sup>*LAPTH  
Chemin de Bellevue B.P. 110  
F-74941 Annecy-le-Vieux, France*

hep-ph/0312334

*Published in JHEP 0402 (2004), 057.*

### Abstract

A compact representation of the loop amplitude  $\gamma\gamma ggg \rightarrow 0$  is presented. The result has been obtained by using helicity methods and sorting with respect to an irreducible function basis. We show how to convert spinor representations into a field strength representation of the amplitude. The amplitude defines a background contribution for Higgs boson searches at the LHC in the channel  $H \rightarrow \gamma\gamma + jet$  which was earlier extracted indirectly from the one-loop representation of the 5-gluon amplitude.



## 1 Introduction

Collider experiments at the TeV scale and especially the forthcoming LHC experiment at CERN produce a large amount of data which has to be cross checked with theoretical predictions. To understand signatures from the Standard Model and beyond on a quantitative level, a good understanding of signal *and* background reactions is mandatory. This fact motivates a considerable effort from the theory side to describe prominent signal and background reactions beyond tree level. This task is highly challenging due to the combinatorial complexity of the Feynman diagrammatic approach if the number of external particles increases. Even the number of known 5-point 1-loop amplitudes is very restricted. Notable exceptions relevant for multi-jet [1–4] and Higgs physics exist [5–10]. Up to now not a single Standard Model process which has generic  $2 \rightarrow 4$  kinematics is computed at the one-loop level although this is relevant for many search channels at the LHC. Examples for such amplitudes are provided only for the Yukawa model [11, 12] or for special helicity configurations [13–18].

To attack such a highly involved problem new methods have to be investigated and efficient, constructive algorithms have to be developed which allow an automated computation of the corresponding amplitudes. To test and investigate new ideas and concepts we calculate the  $gg \rightarrow \gamma\gamma g$  amplitude in the present paper.

In hadronic collisions this amplitude is relevant for the production of photon pairs in association with a jet and as such a contribution of the background to the Higgs boson search channel  $H \rightarrow \gamma\gamma + \text{jet}$ . A phenomenological analysis has already been provided in [19, 20]. Further this amplitude contributes to the 2-loop corrections for  $gg \rightarrow \gamma\gamma$  [21]. In both articles the  $gg \rightarrow \gamma\gamma g$  amplitude has been extracted from the well known 1-loop 5-gluon amplitude [1] by replacing two gluons by photons and modifying the colour algebra of the original result. No direct computation has been presented yet. We will see that a compact representation for this amplitude can be obtained by decomposing the amplitude in helicity components and by using an irreducible function basis.

In the next section we will explain the organization of our calculation and the used methods. Especially we will show how spinorial representations can be retranslated into field strength representations of the result and give some rules to switch between equivalent representations. In section 3 our result will be presented in terms of helicity amplitudes which are expressed by field strength tensors. Section 4 will close the paper with a summary and an outlook for future applications of our methods.

## 2 Algebraic methods

We will outline here briefly the basic technology we have used to perform the calculation. We will focus here predominantly on features which we think are not standard and will not provide all details of the given calculation in this article.

## 2.1 Preliminaries

We consider here the one-loop amplitude for two photon three gluon scattering,  $\gamma\gamma ggg \rightarrow 0$ . It is defined by QED and QCD Feynman rules. The amplitude with all momenta in-going has the following kinematics :

$$\gamma(p_1, \lambda_1) + \gamma(p_2, \lambda_2) + g(p_3, \lambda_3, c_3) + g(p_4, \lambda_4, c_4) + g(p_5, \lambda_5, c_5) \rightarrow 0 \quad (5.29)$$

$\lambda_j$  and  $c_l$  are helicity and the colour indices. The conversion to physical kinematics is done by crossing rules. The amplitude consists of 24 pentagon Feynman graphs and 18 box diagrams<sup>2</sup>. In Fig.5.2 the two basic topologies are shown.

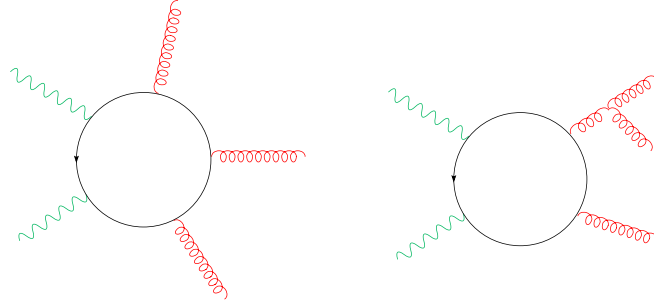


FIG. 5.2 – The two basic topologies of the  $\gamma\gamma ggg$  amplitude. All the other graphs are obtained by reordering of photons and gluons.

The colour structure of the pentagon topology is proportional to a trace of three colour matrices  $T^c$  in the fundamental representation. With the normalization  $\text{tr}(T^a T^b) = \delta_{ab}/2$  one has :  $\text{tr}(T^{c_3} T^{c_4} T^{c_5}) = (d^{c_3 c_4 c_5} + i f^{c_3 c_4 c_5})/4$ . Because of Furry's theorem only the totally antisymmetric contribution in colour space remains which is also present in the 4-point topology, such that there is only one colour structure. Subsequently the amplitude will be written as

$$\Gamma^{\{\lambda_j\}, \{c_j\}}[\gamma\gamma ggg \rightarrow 0] = \frac{Q_q^2 g_s^3}{i\pi^2} f^{c_3 c_4 c_5} \mathcal{A}^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5} \quad (5.30)$$

All numeric factors are shifted to  $\mathcal{A}^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}$ . In principle there are 32 helicity amplitudes but some of them are related by parity conservation. One has

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{++++}(1, 2, 3, 4, 5) &= \mathcal{A}^{-----}(1, 2, 3, 4, 5) \\ \mathcal{A}^{+++ -}(1, 2, 3, 4, 5) &= \mathcal{A}^{----+}(1, 2, 3, 4, 5) \\ \mathcal{A}^{-+++}(1, 2, 3, 4, 5) &= \mathcal{A}^{+----}(1, 2, 3, 4, 5) \\ \mathcal{A}^{--++}(1, 2, 3, 4, 5) &= \mathcal{A}^{+----}(1, 2, 3, 4, 5) \\ \mathcal{A}^{+++-}(1, 2, 3, 4, 5) &= \mathcal{A}^{---++}(1, 2, 3, 4, 5) \\ \mathcal{A}^{-++-}(1, 2, 3, 4, 5) &= \mathcal{A}^{+---+}(1, 2, 3, 4, 5) \end{aligned} \quad (5.31)$$

<sup>2</sup>The triangle diagrams with a 4-gluon vertex vanish due to colour conservation.

All the others are obtained by interchange of the photons and/or cyclic relabeling of the gluons. Thus, it is sufficient to calculate the 6 helicity amplitudes in (5.31). Note that because of Bose symmetry and the colour structure of the amplitude anti-symmetry relations for the auxiliary objects  $\mathcal{A}$  exist. For example :

$$\mathcal{A}^{+++--}(1, 2, 3, 4, 5) = -\mathcal{A}^{+++--}(1, 2, 3, 5, 4) = -\mathcal{A}^{++-+-}(1, 2, 4, 3, 5) \quad (5.32)$$

The Bose symmetry allows for stringent checks of the calculation.

## 2.2 Spinor helicity methods

The use of helicity methods for loop calculations is well established meanwhile [22, 23]. The polarization vectors are represented by spinor products

$$\begin{aligned} \epsilon_\mu^+(p, k) &= \frac{\langle k^- | \mu | p^- \rangle}{\sqrt{2} \langle k^- | p^+ \rangle} \\ \epsilon_\mu^-(p, k) &= \frac{\langle k^+ | \mu | p^+ \rangle}{\sqrt{2} [pk]} \quad , \quad [pk] = \langle k^- | p^+ \rangle^* \end{aligned} \quad (5.33)$$

Here  $k$  is an arbitrary light-like vector defining the transverse direction for the respective photon/gluon polarization vector. To perform the calculation we followed two strategies. In a first approach we constructed an algebraic program where the reference vectors can be chosen arbitrarily. In a second approach we have chosen the reference momenta for the polarization vectors such that there is a global spinorial factor for all Feynman diagrams. In this way a spinorial factor can be extracted from the amplitude and all graphs can be treated uniformly for a given helicity amplitude. To give an example for the second approach let us consider the amplitude  $\Gamma^{-+++}$ . After computing the traces of the one-loop integrals the numerator of the integrals is a polynomial of scalar products of polarization vectors and four momenta,  $P(\epsilon_i \cdot \epsilon_j, \epsilon_i \cdot p_j, p_i \cdot p_j)$ . Products of polarization vectors are expressible in terms of scalar products between polarization vectors and momenta by using the following formulas

$$\begin{aligned} \epsilon^+(i, j) \cdot \epsilon^+(k, l) &= \begin{cases} 0 & \text{if } j = l \\ \frac{1}{p_i \cdot p_l} \epsilon^+(i, j) \cdot p_l \epsilon^+(k, l) \cdot p_i & \text{if } i \neq l, j \neq l \\ \frac{1}{p_j \cdot p_k} \epsilon^+(i, j) \cdot p_k \epsilon^+(k, l) \cdot p_j & \text{if } j \neq k, i = l, j \neq l \\ -\frac{p_i \cdot p_j}{p_i \cdot p_m p_j \cdot p_m} \epsilon^+(i, j) \cdot p_k \epsilon^+(k, l) \cdot p_j & \text{if } j \neq k, i = l, j \neq l \end{cases} \\ \epsilon^+(i, j) \cdot \epsilon^-(k, l) &= \begin{cases} 0 & \text{if } i = l \text{ or } j = k \\ \frac{1}{p_i \cdot p_k} \epsilon^+(i, j) \cdot p_k \epsilon^-(k, l) \cdot p_i & \text{if } i \neq l, j \neq k \end{cases} \end{aligned} \quad (5.34)$$

The arguments stand for the respective index of the external momentum. By applying these formulas to the numerator polynomials  $P$ , each numerator is now a linear combination of terms  $\sim \prod_{j=1}^5 \epsilon_j \cdot q_j$ . Using for example the reference momenta  $(p_5, p_5, p_2, p_3, p_1)$  for the

polarization vectors  $\epsilon_1^-, \epsilon_2^+, \epsilon_3^+, \epsilon_4^+, \epsilon_5^-$  and formulas (5.34) one can express these products by spinor traces through

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^5 \epsilon_j \cdot q_j &= \frac{\langle 5^- | q_5 1 q_1 5 q_2 2 q_3 3 q_4 | 4^- \rangle}{4\sqrt{2}[15] \langle 52 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle [51]} \\ &= \frac{\text{tr}^-(5q_5 1q_1 5q_2 2q_3 3q_4 42)}{4\sqrt{2}[15] \langle 52 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle [51] \langle 42 \rangle [25]} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Here we use the notations  $\text{tr}^\pm(j, \dots) = \text{tr}^\pm(p_j, \dots) = \text{tr}([1 \pm \gamma_5] p_j, \dots)/2$  and  $\langle j^- | l^+ \rangle = \langle j l \rangle$ . To achieve the trace representation a factor one,  $1 = \langle 4^- | 2 | 5^- \rangle / \langle 4^- | 2 | 5^- \rangle$ , was included. Here the vector  $p_2$  may be replaced by any other light-like vector. The spinor product is now a global factor multiplying the given helicity amplitude and does not enter the subsequent reduction algebra of scalar and tensor integrals. After tensor and scalar integral reduction one finds a result of the form

$$\mathcal{A}^{-++++} = \frac{A + \varepsilon(1, 2, 3, 4) B}{4\sqrt{2}[15] \langle 52 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle [51] \langle 42 \rangle [25]} \quad (5.36)$$

$A$  and  $B$  stand for combinations of Mandelstam variables and scalar integrals. The epsilon tensor here is defined by  $\varepsilon(i, j, k, l) = \text{tr}(\gamma_5 i j k l)$ . For the given reference momenta one has :  $\epsilon_1 \cdot p_5 = \epsilon_2 \cdot p_5 = \epsilon_3 \cdot p_2 = \epsilon_4 \cdot p_3 = \epsilon_5 \cdot p_1 = 0$ . Using this fact the spinor representation can be rewritten in terms of field strength tensors,  $\mathcal{F}_j^{\mu\nu} = p_j^\mu \epsilon_j^\nu - p_j^\nu \epsilon_j^\mu$ . The non-Abelian part of the gluon field strength tensor does not enter in the given order in  $\alpha_s$ . By rewriting the epsilon tensor in terms of spinors and identifying the spinor products with polarization vectors and external vectors one arrives at the field strength representation of the given helicity amplitude. With the abbreviations  $C_a = [A + B \text{tr}(2354)]$ ,  $C_b = -2s_{23}s_{24}B$  one gets :

$$\mathcal{A}_F^{-++++} = \text{Tr}(\mathcal{F}_1^- \mathcal{F}_5^-) \text{Tr}(\mathcal{F}_2^+ \mathcal{F}_3^+) \left[ C_a p_3 \cdot \mathcal{F}_4^+ \cdot p_2 + C_b p_3 \cdot \mathcal{F}_4^+ \cdot p_5 \right] \quad (5.37)$$

The field strength objects are more explicitly

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathcal{F}_i^\pm \mathcal{F}_j^\pm) &= 2 p_i \cdot \epsilon_j^\pm p_j \cdot \epsilon_i^\pm - s_{ij} \epsilon_i^\pm \cdot \epsilon_j^\pm \\ p_i \cdot \mathcal{F}_j^\pm \cdot p_k &= (s_{ij} p_k \cdot \epsilon_j^\pm - s_{jk} p_i \cdot \epsilon_j^\pm)/2 \end{aligned} \quad (5.38)$$

The Mandelstam variables are defined by  $s_{ij} = 2p_i \cdot p_j$ . The obtained representations are not unique and we will discuss below how to transform the result into equivalent representations. An analogous approach is possible for all the other helicity amplitudes, too. We will see below that all amplitudes are constructed from traces and so-called tails [24], which are Lorentz invariants built out of field strength tensors and external momenta. Here only the most simple type for a tail term appears,  $p_j \cdot \mathcal{F}_k^\pm \cdot p_l$ . Using helicity methods in amplitude calculations typically leads to expressions where spinor products are the basic building blocks. Within the method presented here complex phases do not appear in the final results, which is of advantage concerning numerical evaluation.

### 2.3 Basic analytical structures

As explained in the last subsection each Feynman diagram is a linear combination of spinor terms  $\langle i^- | \dots k \dots p_l \dots | j^- \rangle$ . It was already observed elsewhere [25–27] that it is always possible to convert such an expression to a form with inverse propagators and a spinor trace which contains at most one power of the loop momentum. This means that only rank 1 5-point tensor integrals have to be reduced which simplifies the calculation considerably. It is easy to see that this statement holds true for a general massive 5-point amplitude too, by using the helicity formalism for massive particles and applying the same reasoning as outlined above. A similar observation was made recently in [28]. We want to remark that an equivalent statement is true for general  $N$ -point amplitudes. Note that by power counting all 5-point graphs are IR and UV finite. The tensor reduction introduces spurious UV and IR divergences. The box topologies are UV divergent but the divergence cancels in the sum over all box graphs. For the reduction of the rank 1 5-point function and the 4-point tensor integrals we applied the formalism outlined in [30,31]. After tensor reduction one is left with scalar integrals which are reduced to a basic set of integrals using well known formulas [30,32]. We have used FORM [29] to perform the tensor and scalar integral reductions. The 5-point functions are reduced to box integrals with one external massive line. The latter are reduced to triangle functions and box functions in  $(n+2)$  dimensions, where  $n = 4 - 2\epsilon$ . In this way the spurious infrared divergences are isolated in a transparent way. For a given ordering of the external legs, say (1,2,3,4,5), one finds the following basis of scalar functions, see also Fig.5.3 :

$$\begin{aligned} & I_4^{n+2}(p_1, p_2, p_3, p_4 + p_5) + 4 \text{ cyclic permutations} \\ & I_3^n(p_1, p_2 + p_3, p_4 + p_5) + 4 \text{ cyclic permutations} \\ & I_3^n(p_1, p_2, p_3 + p_4 + p_5) + 4 \text{ cyclic permutations} \\ & I_2^n(p_1 + p_2, p_3 + p_4 + p_5) + 4 \text{ cyclic permutations} \end{aligned}$$

We are following the notation in [30]. In addition the amplitude contains a finite part from the ultra-violet region of the one loop integrals. Terms of order  $\mathcal{O}(n-4)$  combine with UV divergent 2-point integrals  $I_2^n \sim 1/\epsilon$  to constant terms. The coefficients of these functions are first simplified on a graph by graph basis.



FIG. 5.3 – The scalar graph topologies of the  $\gamma\gamma g g g$  amplitude.

As each graph is infrared finite the triangle graphs with one and two external legs off-shell cancel as a whole. No expansion in  $\epsilon$  is performed for the scalar integrals. The different analyticity properties, or in other words, the different cut structure of each basis function does not allow any cross talking between the coefficients. It follows that each graph is

expressible by 6-dimensional box integrals, 2-point functions and a constant term. For later use we define the following dimensionless function :

$$F_1(s_{j_1 j_2}, s_{j_2 j_3}, s_{j_4 j_5}) = \frac{1}{s_{j_4 j_5} - s_{j_1 j_2} - s_{j_2 j_3}} I_4^6(p_{j_1}, p_{j_2}, p_{j_3}, p_{j_4} + p_{j_5}) \quad (5.39)$$

Its analytic representation is well known and can be found in [12]. Our result will be expressed entirely in terms of this function, the scalar 2-point integral in  $n = 4 - 2\epsilon$  dimensions,

$$I_2^n(s_{ij}) = \frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)^2}{\Gamma(2-2\epsilon)} \frac{(-s_{ij})^{-\epsilon}}{\epsilon} \quad (5.40)$$

and a constant term. As the amplitude is UV finite also the sum of coefficients of the 2-point functions have to cancel. For each helicity amplitude the coefficient of a given function was first simplified for each graph. Then the sum over all graphs was performed and the result again simplified using MAPLE [33]. The application of the helicity method together with the sorting of a given diagram into a function bases proved to be an efficient method for the calculation of the given amplitude. The size of the expressions was never a problem in our approach as we have split up the calculation as much as possible into irreducible building blocks.

## 2.4 Rules for field strength objects

We have shown above that one can convert spinor representations into field strength representations of the amplitudes. The latter are not unique and we quote two useful formulas to relate equivalent representations to each other. The first is a permutation rule :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathcal{F}_1^+ \mathcal{F}_2^+) p_i \cdot \mathcal{F}_3^+ \cdot p_j &= \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_1^+ \mathcal{F}_3^+)}{s_{13}^2 s_{23}} \left\{ \left[ s_{23}(s_{1j}s_{3i} - s_{1i}s_{3j}) + s_{13}(s_{2i}s_{3j} - s_{2j}s_{3i}) \right] p_3 \cdot \mathcal{F}_2^+ \cdot p_1 \right. \\ &\quad \left. + s_{12}s_{13}(s_{3i} p_3 \cdot \mathcal{F}_2^+ \cdot p_j - s_{3j} p_3 \cdot \mathcal{F}_2^+ \cdot p_i) \right\} \end{aligned} \quad (5.41)$$

Of course the formula is true for arbitrary indices. The indices 1,2,3 were taken for convenience. In a given helicity basis it is easy to see that for a given field strength tensor only two tails,  $p_i \cdot \mathcal{F} \cdot p_j$ , are independent. This is directly related to the fact that there are only two independent scalar products between a polarization vector and external vectors. The second useful identity is a flipping rule :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathcal{F}_1^+ \mathcal{F}_2^+) \text{Tr}(\mathcal{F}_3^+ \mathcal{F}_4^+) &= \text{Tr}(\mathcal{F}_1^+ \mathcal{F}_3^+) \text{Tr}(\mathcal{F}_2^+ \mathcal{F}_4^+) \left( \frac{\text{tr}^+(1243)}{s_{13}s_{24}} \right)^2 \\ &= \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_1^+ \mathcal{F}_3^+)}{s_{13}^2} \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_2^+ \mathcal{F}_4^+)}{s_{24}^2} [\text{tr}(1243)\text{tr}^+(1243) - s_{12}s_{13}s_{34}s_{42}] \end{aligned}$$

Both identities can be verified by choosing an arbitrary set of reference momenta and the identities in Eq. (5.34). By complex conjugation,  $(\epsilon_j^+)^* = \epsilon_j^-$ , the formulas hold also for negative helicities. As  $\text{Tr}(\mathcal{F}_i^+ \mathcal{F}_j^-) = 0$ , no flipping or permutation rules exist between different helicities.

### 3 Result

We present now our result by expressing each helicity amplitude through field strength tensors and coefficients for the functions  $F_1, I_2^n, 1$ . The Ward identities are manifest in this representation.

#### 3.1 $\mathcal{A}^{+++++}$

For the helicity amplitude with all helicities plus, all 6-dimensional box and 2-point functions cancel. This can be understood by the fact that every amplitude is defined, up to a polynomial remainder, by the sum over all cuts [16]. Each cut corresponds to the gluing of two tree level amplitudes, in our case 2 or 3 gauge bosons attached to a fermion line. The tree level amplitude of a massless fermion and two/three gauge bosons with equal helicities vanishes. It follows that no non-polynomial function, i.e.  $F_1$  or  $I_2^n$ , can be present in the amplitude. By choosing reference momenta in a cyclic way,  $p_j$  for  $\epsilon_{j+1}$ , we find a term of the form

$$\mathcal{A}^{+++++} = \frac{1}{2\sqrt{2} \langle 51 \rangle \langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \langle 45 \rangle} \text{tr}^+(1, 2, 3, 5) \frac{s_{12}}{s_{35}} \quad (5.43)$$

which can be written as

$$\mathcal{A}^{+++++} = \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_1^+ \mathcal{F}_2^+) \text{Tr}(\mathcal{F}_3^+ \mathcal{F}_4^+ \mathcal{F}_5^+)}{2 s_{34} s_{45} s_{35}} \quad (5.44)$$

where  $F_j^{\mu\nu} = p_j^\mu \epsilon_j^\nu - p_j^\nu \epsilon_j^\mu$  is the Abelian part of the field strength tensor of the photons and gluons. In this form Ward identities are manifest. The expression is symmetric under exchange of the two photons and antisymmetric under gluon exchange. Including the antisymmetric colour factor leads to the full  $S_2 \otimes S_3$  Bose symmetry of this amplitude.

#### 3.2 $\mathcal{A}^{-++++}$

The only allowed structure is a polynomial. We find

$$\mathcal{A}^{-++++} = \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_2^+ \mathcal{F}_3^+) \text{Tr}(\mathcal{F}_4^+ \mathcal{F}_5^+)}{s_{23}^2 s_{45}^2} \left[ C^{-++++} p_2 \cdot \mathcal{F}_1^- \cdot p_4 - (4 \leftrightarrow 5) \right] \quad (5.45)$$

with the coefficient

$$C^{-++++} = -\frac{s_{15} s_{12}}{s_{24} s_{35}} - \frac{s_{15}}{s_{35}} + \frac{s_{23}}{s_{24}} - \frac{s_{15}}{s_{34}} \quad (5.46)$$

Using the shift rules one finds that  $\mathcal{A}^{-++++}$  is totally anti-symmetric in the gluon indices 3,4,5. Taking into account the colour factor this leads to the full  $S_3$  Bose symmetry of the corresponding helicity amplitude.

### 3.3 $\mathcal{A}^{++++-}$

Again no nontrivial function can be present due to cutting rules. For the polynomial term we find the following result

$$\mathcal{A}^{++++-} = \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_1^+ \mathcal{F}_2^+) \text{Tr}(\mathcal{F}_3^+ \mathcal{F}_4^+)}{s_{12}^2 s_{34}^2} \left[ C^{++++-} p_1 \cdot \mathcal{F}_5^- \cdot p_3 - (3 \leftrightarrow 4) \right] \quad (5.47)$$

The coefficient is given by

$$\begin{aligned} C^{++++-} = & -\frac{s_{45}s_{13}s_{14}}{s_{35}s_{15}s_{24}} - \frac{s_{13}s_{45}}{s_{15}s_{35}} + \frac{s_{45}^2}{s_{15}s_{24}} - \frac{s_{12}^2 + s_{45}^2 - s_{12}s_{45}}{s_{35}s_{15}} + \frac{s_{13}s_{15}}{s_{23}s_{45}} + \frac{s_{13} - s_{34}}{s_{23}} \\ & - \frac{s_{34}s_{45}}{s_{23}s_{15}} + \frac{s_{15} - s_{25}}{s_{45}} - \frac{s_{23} + s_{35}}{s_{13}} - \frac{s_{23}s_{25}}{s_{13}s_{45}} + \frac{s_{34} + s_{12}}{s_{15}} \end{aligned} \quad (5.48)$$

We have checked that the corresponding amplitude has a  $S_2 \otimes S_2$  Bose symmetry when the photons and the gluons with equal helicities are interchanged.

### 3.4 $\mathcal{A}^{--+++}$

Now a nontrivial cut structure is possible. The cuts which can be associated with the Mandelstam variables  $s_{13}, s_{14}, s_{15}, s_{23}, s_{24}, s_{25}$  are allowed by the helicity structure. No other Mandelstam variable is to be expected as an argument of the functions  $F_1, I_2^n$  and indeed is not observed. We split the result into three pieces with indices  $F, B, 1$ , which belong to the part proportional to 6-dimensional boxes  $F_1$ , a part containing bubble graphs  $I_2^n$ , and a constant term, respectively.

$$\mathcal{A}^{--+++} = \mathcal{A}_F^{--+++} + \mathcal{A}_B^{--+++} + \mathcal{A}_1^{--+++} \quad (5.49)$$

We find

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_F^{--+++} = & \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_1^- \mathcal{F}_2^-) \text{Tr}(\mathcal{F}_3^+ \mathcal{F}_4^+)}{s_{12}^2 s_{34}^2} \left[ C_F^{--+++} p_1 \cdot \mathcal{F}_5^+ \cdot p_3 - (3 \leftrightarrow 4) \right] F_1(s_{13}, s_{14}, s_{25}) \\ & - (4 \leftrightarrow 5) - (5 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 2) - (1 \leftrightarrow 2, 4 \leftrightarrow 5) - (1 \leftrightarrow 2, 5 \leftrightarrow 3) \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_B^{--+++} = & \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_1^- \mathcal{F}_2^-) \text{Tr}(\mathcal{F}_3^+ \mathcal{F}_4^+)}{s_{12}^2 s_{34}^2} \left[ C_B^{--+++} p_1 \cdot \mathcal{F}_5^+ \cdot p_3 - (3 \leftrightarrow 4) \right] I_2^n(s_{15}) \\ & - (4 \leftrightarrow 5) - (5 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 2) - (1 \leftrightarrow 2, 4 \leftrightarrow 5) - (1 \leftrightarrow 2, 5 \leftrightarrow 3) \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\mathcal{A}_1^{--+++} = \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_1^- \mathcal{F}_2^-) \text{Tr}(\mathcal{F}_3^+ \mathcal{F}_4^+ \mathcal{F}_5^+)}{2 s_{34} s_{45} s_{s35}} \quad (5.52)$$



The indicated permutations have to be applied to the respective initial term for the indices of the field strength tensors, momenta and Mandelstam variables. The coefficients are

$$\begin{aligned}
C_F^{-++} &= \frac{1}{2} \frac{s_{12}^2 - 2s_{13}s_{14}}{s_{35}s_{15}} - \frac{s_{14}}{s_{34}} - \frac{s_{14}}{s_{35}} \\
C_B^{-++} &= \frac{s_{45}}{s_{15}} \left[ \frac{s_{13} + s_{35}}{s_{14} + s_{45}} + \frac{s_{14} + s_{45}}{s_{13} + s_{35}} \right] + \frac{s_{45}^2 s_{13}}{s_{15} s_{35}^2} + \frac{s_{14} s_{35}}{s_{15} s_{45}} + 2 \frac{(s_{15} + s_{45})^2}{s_{35}^2} \\
&\quad - \frac{s_{13} + s_{35}}{s_{15}} - \frac{s_{14} s_{45}}{s_{15} s_{35}} - \frac{s_{45}^2}{s_{35} s_{15}} + \frac{s_{14} + s_{24}}{s_{45}} + \frac{s_{12} - s_{14} - s_{35}}{s_{14} + s_{45}} + 2 \frac{s_{14}(s_{15} + s_{45})}{s_{35}^2} \\
&\quad + \frac{s_{23}^2 s_{15}}{s_{35}^2 (s_{13} + s_{35})} + \frac{2s_{45} + s_{15}}{s_{13} + s_{35}} - 2 \frac{(s_{15} + s_{45}) s_{23}}{s_{35} (s_{13} + s_{35})} - \frac{(2s_{45} + s_{15})}{s_{35}} + \frac{s_{13}(2s_{45} + s_{15})}{s_{35}^2}
\end{aligned} \tag{5.53}$$

In the given expressions the  $S_2 \otimes S_3$  symmetry under exchange of the two photons and the three gluons is manifest after taking into account the omitted colour factor. We note that we have actually calculated all coefficients of the  $F_1, I_2^n$  functions and checked the symmetry explicitly. A further nontrivial check is provided by the fact that the sum of all coefficients of the bubble integrals add up to zero. Of course the amplitude is finite and the  $1/\epsilon$  poles cancel. To show this the flipping and shifting rules (5.41,5.42) for the field strength expressions have to be applied. The logarithmic terms can be organized as logarithms of ratios of Mandelstam variables. The presence of the constant term can be inferred from the  $++++$  amplitude. Gauge invariance predicts this term as a part of the result. The fact that no other constant term is present seems to be an effect of the high symmetry of this amplitude.

### 3.5 $\mathcal{A}^{++--}$

The amplitude has a  $S_2 \otimes S_2$  symmetry under exchange of the gluons with equal helicities and the photons. Although we use this symmetry in the representation we have calculated all the coefficients of the functions independently and checked the symmetries explicitly. Again we write

$$\mathcal{A}^{++--} = \mathcal{A}_F^{++--} + \mathcal{A}_B^{++--} + \mathcal{A}_1^{++--} \tag{5.54}$$

The amplitude has less symmetries than  $\mathcal{A}^{--++}$  above :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_F^{++--} &= \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_1^+ \mathcal{F}_2^+) \text{Tr}(\mathcal{F}_4^- \mathcal{F}_5^-)}{s_{12}^2 s_{45}^2} \left[ [C_{F1}^{++--} p_1 \cdot \mathcal{F}_3^+ \cdot p_4 + (1 \leftrightarrow 2)] F_1(s_{14}, s_{24}, s_{35}) - (4 \leftrightarrow 5) \right] \\
&\quad + \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_4^- \mathcal{F}_5^-)}{s_{45}^2} \left[ \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_1^+ \mathcal{F}_3^+)}{s_{13}^2} [C_{F2}^{++--} p_1 \cdot \mathcal{F}_2^+ \cdot p_4 - (1 \leftrightarrow 3)] F_1(s_{14}, s_{34}, s_{25}) \right. \\
&\quad \left. + (1 \leftrightarrow 2) - (4 \leftrightarrow 5) - (1 \leftrightarrow 2, 4 \leftrightarrow 5) \right]
\end{aligned}$$

The coefficients are

$$\begin{aligned}
C_{F1}^{++++} &= \left[ -\frac{2s_{24}^2 s_{34}}{s_{12}^2 s_{35}} - \frac{2s_{24}(s_{23} + s_{24})}{s_{12}^2} - \frac{3s_{24}}{s_{12}} + \frac{2s_{24}(-s_{34} + 2s_{24})}{s_{35}s_{12}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(s_{14}^2 + s_{24}^2)}{2s_{13}s_{34}} - \frac{(s_{14}^2 + s_{24}^2)}{s_{34}s_{35}} - \frac{(2s_{14} - 2s_{24})}{s_{35}} - \frac{s_{34}}{s_{35}} - \frac{(s_{34} + 2s_{14})}{2s_{13}} \right] \\
C_{F2}^{++++} &= \left[ \frac{s_{34}^2}{2s_{12}s_{24}} + \frac{(s_{34} + s_{45})^2}{2s_{12}s_{24}} - \frac{s_{34}}{s_{13}} \right]
\end{aligned} \tag{5.55}$$

The nonvanishing two-point functions are

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_B^{++++} &= \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_1^+ \mathcal{F}_2^+) \text{Tr}(\mathcal{F}_4^- \mathcal{F}_5^-)}{s_{12}^2 s_{45}^2} \left[ [C_{B1}^{++++} p_1 \cdot \mathcal{F}_3^+ \cdot p_4 + (1 \leftrightarrow 2)] I_2^n(s_{34}) - (4 \leftrightarrow 5) \right] \\
&\quad + \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_4^- \mathcal{F}_5^-)}{s_{45}^2} \left[ \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_1^+ \mathcal{F}_3^+)}{s_{13}^2} [C_{B2a}^{++++} p_1 \cdot \mathcal{F}_2^+ \cdot p_4 + C_{B2b}^{++++} p_3 \cdot \mathcal{F}_2^+ \cdot p_4] I_2^n(s_{15}) \right. \\
&\quad \left. + (1 \leftrightarrow 2) - (4 \leftrightarrow 5) - (1 \leftrightarrow 2, 4 \leftrightarrow 5) \right]
\end{aligned}$$

with the coefficients

$$\begin{aligned}
C_{B1}^{++++} &= \left[ -\frac{s_{12}s_{24}^2}{s_{34}(s_{23} + s_{24})^2} - \frac{s_{24}(s_{12} - s_{24})}{(s_{23} + s_{24})^2} + \frac{s_{24}(s_{45} + 2s_{24} + s_{12})}{s_{34}(s_{23} + s_{24})} - \frac{2s_{24}^2}{s_{12}(s_{23} + s_{24})} \right. \\
&\quad + \frac{s_{12}}{(s_{23} + s_{24})} - \frac{s_{23}(3s_{14} + s_{12} + s_{23})}{s_{34}s_{13}} - \frac{s_{23}^2 s_{14}}{s_{34}s_{13}^2} + \frac{s_{23}(s_{23} + s_{12} + s_{14})}{s_{34}(s_{13} + s_{14})} - \frac{s_{23}s_{14}s_{12}}{s_{34}(s_{13} + s_{14})^2} \\
&\quad + \frac{(s_{13} + s_{23})(-s_{23} + s_{15})}{s_{34}s_{23}} + \frac{s_{14}s_{34}(s_{12} - s_{14})^2}{s_{13}^2(s_{13} + s_{14})^2} - \frac{s_{23}s_{14}^2(-s_{14} + 4s_{12})}{s_{12}s_{13}^2(s_{13} + s_{14})} - \frac{s_{23}s_{14}^2(2s_{12} - s_{14})}{s_{13}^2(s_{13} + s_{14})^2} \\
&\quad - \frac{2s_{14}s_{25}}{s_{12}(s_{13} + s_{14})} - \frac{2s_{12}s_{34}(-2s_{14} + s_{12})}{s_{13}^2(s_{13} + s_{14})} - \frac{3s_{14}^3 s_{23}}{s_{13}^2 s_{12}(s_{13} + s_{14})} + \frac{s_{23}s_{14}(4s_{12} + 5s_{14})}{s_{13}^2(s_{13} + s_{14})} - \frac{2s_{14}^2 s_{23}}{s_{13}^2 s_{12}} \\
&\quad \left. - \frac{2s_{23}s_{14}(s_{13} - 2s_{14})}{s_{13}^2 s_{12}} + \frac{(2s_{23} + 2s_{12} + 2s_{34})}{s_{13}} - \frac{(s_{34}s_{14} + 2s_{12}s_{34} + 2s_{23}s_{14})}{s_{13}^2} - \frac{(s_{12} + s_{13} - s_{23})}{s_{23}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{B2a}^{++++--} = & \left[ \frac{s_{34}^2 s_{24}^3}{(s_{23} + s_{24})^2 s_{23} s_{12}^2} - \frac{s_{34} s_{24}^2 (-s_{24} + 3s_{34} + 2s_{13})}{s_{12} (s_{23} + s_{24})^2 s_{23}} + \frac{s_{24} (-2s_{24} + 3s_{34} + 2s_{13}) s_{34}}{(s_{23} + s_{24})^2 s_{23}} \right. \\
& - \frac{s_{34} (6s_{23} - 3s_{34} + s_{24} - 2s_{45})}{s_{12} s_{23}} + \frac{2s_{34}^2 s_{12}}{s_{23} s_{24} (s_{23} + s_{24})} - \frac{7s_{34}}{(s_{23} + s_{24})} - \frac{s_{34} s_{24} (s_{34} + 3s_{13} - s_{24})}{(s_{23} + s_{24}) s_{12}^2} \\
& + \frac{s_{12} s_{34} (s_{24} - s_{34})}{(s_{23} + s_{24})^2 s_{23}} - \frac{s_{13} s_{34} (s_{34} + s_{24})}{s_{23} s_{24} (s_{23} + s_{34})} - \frac{s_{45}^2}{s_{12}^2} - \frac{2s_{23}^2 (3s_{34} s_{45} + s_{34}^2 + 3s_{45}^2)}{s_{24} s_{12}^3} - \frac{s_{34}}{(s_{23} + s_{34})} \\
& - \frac{2s_{24} s_{34}^2}{s_{12}^3} - \frac{s_{24} s_{34}^2}{s_{12}^2 s_{23}} - \frac{s_{34} (2s_{23} - 3s_{34} - 3s_{45} + s_{24})}{s_{12}^2} + \frac{2s_{23} (-3s_{45}^2 + s_{34}^2)}{s_{12}^3} - \frac{2s_{45}^3 (2s_{23} + s_{24})}{s_{12}^2 s_{34}} \\
& + \frac{s_{34} (-2s_{45} + 2s_{12} - 3s_{34})}{s_{24} s_{23}} + \frac{2s_{34}^2 s_{24}^2}{(s_{23} + s_{24}) s_{12}^3} - \frac{s_{45}^3 s_{23}}{s_{12}^2 s_{34} s_{24}} + \frac{s_{34} (7s_{34} + 5s_{13} + 3s_{12})}{(s_{23} + s_{24}) s_{24}} + \frac{5s_{34}}{s_{24}} \\
& - \frac{2s_{23}^2 s_{45}^3}{s_{12}^3 s_{34} s_{24}} - \frac{s_{23} (4s_{34}^2 + 6s_{45}^2 + 9s_{34} s_{45})}{s_{12}^2 s_{24}} - \frac{s_{34} (6s_{34} + 4s_{13} - 3s_{24})}{(s_{23} + s_{24}) s_{12}} + \frac{s_{45}^2 (2s_{23} + 2s_{24} - s_{45} + s_{12})}{s_{12}^2 s_{34}} \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{B2b}^{++++--} = & \left[ \frac{s_{35}^2}{(s_{23} + s_{24})^2} - \frac{s_{34} (2s_{35} + s_{12})}{(s_{23} + s_{24})^2} + \frac{s_{24} (s_{24} + 2s_{34} - 2s_{35})}{(s_{23} + s_{24})^2} - \frac{(2s_{12} s_{34} + s_{13}^2)}{s_{23}^2} \right. \\
& + \frac{2s_{14} s_{34} s_{23}}{(s_{23} + s_{24}) s_{12}^2} - \frac{2s_{14} s_{34} s_{23}}{s_{24} s_{12}^2} - \frac{2s_{12} s_{34} (s_{34} + s_{12})}{s_{24} s_{23}^2} - \frac{2s_{35} s_{34} (s_{24} + s_{12})}{(s_{23} + s_{34}) s_{23}^2} - \frac{4s_{14} s_{23} s_{45}}{s_{24} s_{12}^2} \\
& - \frac{2s_{14}}{(s_{23} + s_{24})} - \frac{s_{12} s_{34} (-3s_{35} + s_{12})}{s_{24} (s_{23} + s_{24})^2} - \frac{s_{12} s_{34}^2 s_{35}}{(s_{23} + s_{34}) s_{23}^2 s_{24}} - \frac{s_{14} (s_{14} + s_{24})^2}{s_{12} s_{34} s_{24}} - \frac{(2s_{13} + s_{23})}{s_{23}} \\
& + \frac{s_{34} s_{24} s_{14}}{s_{12} (s_{23} + s_{24})^2} - \frac{s_{14} s_{12} s_{34}}{s_{24}^2 (s_{23} + s_{24})} - \frac{s_{14} s_{12} s_{34}}{s_{24} s_{23}^2} + \frac{s_{14} s_{12} s_{34}}{s_{24}^2 s_{23}} - \frac{2s_{14} s_{45}^2 s_{23}}{s_{12}^2 s_{34} s_{24}} - \frac{(2s_{14} - s_{34}) s_{14}}{(s_{23} + s_{24}) s_{12}} \\
& + \frac{s_{12}^2 s_{34}^2}{s_{24}^2 (s_{23} + s_{24})^2} - \frac{s_{12}^2 s_{34}^2}{s_{23}^2 s_{24}^2} - \frac{s_{34}^2 (s_{24} + s_{12})}{(s_{23} + s_{34}) s_{23}^2} + \frac{s_{14} (3s_{14} + s_{24})}{s_{12} s_{24}} - \frac{s_{24} s_{35}^2}{(s_{23} + s_{34}) s_{23}^2} - \frac{2s_{14} s_{45}^2}{s_{34} s_{12}^2} \Big]
\end{aligned}$$

The constant term is

$$\mathcal{A}_1^{++++--} = \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_1^+ \mathcal{F}_2^+) \text{Tr}(\mathcal{F}_4^- \mathcal{F}_5^-)}{s_{12}^2 s_{45}^2} [C_1^{++++--} p_2 \cdot \mathcal{F}_3^+ \cdot p_4 - (4 \leftrightarrow 5)] \quad (5.56)$$

with the coefficient

$$\begin{aligned}
C_1^{++++} = & \left[ -\frac{s_{12}(s_{15} + 2s_{13} + s_{14})}{s_{23}(-s_{34} + s_{15})} + \frac{(s_{15} + s_{35})(s_{23} + s_{15})s_{25}}{(-s_{34} + s_{15})s_{23}s_{34}} + \frac{s_{14}(2s_{15} + s_{14})}{s_{13}(s_{13} + s_{14})} - \frac{(s_{13} - s_{15})^2(s_{34} + s_{13})}{(s_{13} + s_{14})s_{23}s_{14}} \right. \\
& + \frac{(-s_{14} + s_{13})^2(s_{34} + s_{13})}{s_{13}s_{23}(s_{15} + s_{13})} + \frac{s_{14}(s_{35}s_{14} - s_{15}^2)}{s_{13}s_{35}(s_{15} + s_{13})} - \frac{s_{15}^2s_{14}}{s_{13}s_{23}s_{35}} + \frac{s_{14}^2}{s_{23}s_{13}} + \frac{s_{23}s_{13}}{s_{14}(s_{14} - s_{35})} \\
& + \frac{s_{23}s_{15}}{s_{35}(s_{14} - s_{35})} + \frac{s_{35}(-s_{24} + 2s_{23})}{s_{14}(s_{14} - s_{35})} - \frac{(s_{13} + s_{14})s_{25}}{s_{35}s_{14}} + \frac{(s_{13} + 2s_{12})}{s_{34}} - \frac{s_{14}s_{15}(s_{13} + s_{34} - s_{15})}{s_{13}s_{35}s_{23}} \\
& + \frac{(s_{12}^2 + 2s_{12}s_{13} + s_{13}^2 + s_{12}s_{25} + s_{25}s_{13} + s_{25}^2)}{s_{23}s_{34}} + \frac{(s_{14} - s_{15})}{s_{13}} - \frac{(s_{13} - s_{34} + s_{15} - 3s_{23})}{s_{14}} \\
& \left. + \frac{(s_{13} - s_{15})^2(s_{34} + s_{13})}{s_{23}s_{13}s_{14}} - \frac{(s_{15} + s_{14})(-3s_{34} + s_{14})}{s_{23}s_{13}} - \frac{(-3s_{35} + s_{13} - 3s_{15} - 2s_{14})}{s_{23}} \right]
\end{aligned}$$

### 3.6 $\mathcal{A}^{++++}$

The amplitude has only a  $S_2$  symmetry under exchange of the gluons with equal helicities. Again we split the amplitude into an  $F_1$ ,  $I_2^n$  and constant part.

$$\mathcal{A}^{++++} = \mathcal{A}_F^{++++} + \mathcal{A}_B^{++++} + \mathcal{A}_1^{++++} \quad (5.57)$$

with

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_F^{++++} = & \left\{ \left[ [C_{F1}^{++++} p_1 \cdot \mathcal{F}_2^+ \cdot p_3 F_1(s_{13}, s_{14}, s_{25})] \right. \right. \\
& + [C_{F2}^{++++} p_1 \cdot \mathcal{F}_2^+ \cdot p_3 F_1(s_{35}, s_{45}, s_{12})] \left. \right] \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_1^- \mathcal{F}_5^-) \text{Tr}(\mathcal{F}_3^+ \mathcal{F}_4^+)}{s_{15}^2 s_{34}^2} \\
& + \left[ [C_{F3}^{++++} p_1 \cdot \mathcal{F}_4^+ \cdot p_2 + (2 \leftrightarrow 3)] F_1(s_{12}, s_{13}, s_{45}) \right. \\
& + [C_{F4a}^{++++} p_1 \cdot \mathcal{F}_4^+ \cdot p_2 + C_{F4b}^{++++} p_1 \cdot \mathcal{F}_4^+ \cdot p_3] F_1(s_{25}, s_{35}, s_{14}) \left. \right] \\
& \left. \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_1^- \mathcal{F}_5^-) \text{Tr}(\mathcal{F}_2^+ \mathcal{F}_3^+)}{s_{15}^2 s_{23}^2} \right\} - (3 \leftrightarrow 4)
\end{aligned}$$

and

$$C_{F1}^{-++++} = \frac{1}{2} \frac{s_{15}^2}{s_{12}s_{23}} - \frac{s_{13}s_{14}}{s_{12}s_{23}} - \frac{s_{14}}{s_{34}} - \frac{s_{14}}{s_{23}} \quad (5.58)$$

$$C_{F2}^{-++++} = -C_{F1}^{-++++} \quad (5.59)$$

$$C_{F3}^{-++++} = -\frac{1}{2} \frac{s_{15}^2}{s_{14}s_{24}} + \frac{s_{12}s_{13}}{s_{14}s_{24}} + \frac{s_{13}}{s_{24}} + \frac{s_{13}}{s_{23}} - \frac{s_{15}^2 - 2s_{12}s_{13}}{s_{14}s_{45}} + 2 \frac{s_{13}}{s_{23}} \left[ 1 + \frac{s_{24}}{s_{23}} - \frac{s_{12}}{s_{45}} - \frac{s_{12}s_{15}}{s_{23}s_{45}} \right] \quad (5.60)$$

$$C_{F4a}^{-++++} = \frac{1}{2} \frac{s_{15}^2 - 2s_{12}s_{13}}{s_{14}s_{24}} - \frac{s_{13}}{s_{24}} - \frac{s_{13}}{s_{23}} \quad (5.61)$$

$$C_{F4b}^{-++++} = -\frac{s_{13}^2}{2s_{14}s_{34}} - \frac{(s_{13} + s_{15})^2}{2s_{14}s_{34}} + \frac{(s_{12} - s_{13})}{s_{34}} + \frac{s_{12}}{s_{23}}$$

The nonvanishing contribution of the 2-point integrals can be cast into the form

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_B^{-++++} = & \left\{ \left[ C_{B1}^{-++++} p_1 \cdot \mathcal{F}_2^+ \cdot p_3 I_2^n(s_{12}) \right. \right. \\ & \left. \left. + C_{B2}^{-++++} p_1 \cdot \mathcal{F}_2^+ \cdot p_3 I_2^n(s_{25}) \right] \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_1^- \mathcal{F}_5^-) \text{Tr}(\mathcal{F}_3^+ \mathcal{F}_4^+)}{s_{15}^2 s_{34}^2} \right. \\ & + \left[ [C_{B3}^{-++++} p_1 \cdot \mathcal{F}_4^+ \cdot p_2 + (2 \leftrightarrow 3)] I_2^n(s_{45}) \right. \\ & \left. + [C_{B4a}^{-++++} p_1 \cdot \mathcal{F}_4^+ \cdot p_2 + C_{B4b}^{-++++} p_1 \cdot \mathcal{F}_4^+ \cdot p_3] I_2^n(s_{14}) \right] \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_1^- \mathcal{F}_5^-) \text{Tr}(\mathcal{F}_2^+ \mathcal{F}_3^+)}{s_{15}^2 s_{23}^2} \Big\} \\ & - (3 \leftrightarrow 4) \end{aligned}$$

Note that  $I_2^n(s) \sim (-s)^{-\epsilon}/\epsilon$  leads to a logarithmic term and a pole part. The latter has to vanish because of the finiteness of the amplitude. Replacing the  $I_2^n$  integrals by the pole part only leads to a nontrivial relation between the coefficients. We have checked algebraically that the sum over the pole parts is indeed zero by using the flipping and remapping for our field strength representation rules (5.41,5.42). Of course this provides another non-trivial check of the calculation. The coefficients of the logarithms are



$$\begin{aligned}
C_{B4a}^{-+++-} = & \left[ \frac{s_{34}s_{23}^2}{s_{14}(s_{12}+s_{24})^2} - \frac{s_{23}^3s_{14}}{s_{24}^2(s_{12}+s_{24})^2} - \frac{s_{23}(s_{35}+s_{34})(s_{24}+2s_{23})}{s_{24}(s_{12}+s_{24})^2} - \frac{s_{23}s_{34}}{s_{35}(s_{12}+s_{24})} \right. \\
& + \frac{(s_{35}+s_{34})}{(s_{12}+s_{24})} + \frac{s_{23}^2(3s_{13}+2s_{23})}{s_{24}^2(s_{12}+s_{24})} - \frac{s_{35}s_{34}}{s_{14}(s_{23}+s_{35})} - \frac{(s_{34}-s_{35})}{(s_{23}+s_{35})} - \frac{3s_{34}(2s_{34}+s_{13})}{s_{24}s_{14}} \\
& - \frac{s_{34}^2(3s_{34}-3s_{35}+2s_{13})}{s_{24}^2s_{14}} + \frac{2s_{34}^3s_{35}}{s_{14}s_{24}^3} + \frac{(s_{13}+s_{34})s_{34}}{s_{35}s_{14}} + \frac{s_{15}^2(s_{15}-s_{24})(2s_{14}+s_{24})}{s_{35}s_{24}^3} - \frac{3s_{15}^2}{s_{24}^2} \\
& \left. - \frac{2s_{35}s_{23}^3}{s_{24}^3(s_{12}+s_{24})} + \frac{2s_{15}^2(s_{15}-3s_{34})}{s_{24}^3} - \frac{s_{24}(s_{23}+s_{35})}{s_{34}s_{14}} - \frac{(s_{34}+s_{15}-s_{24})}{s_{34}} - \frac{(s_{24}+s_{34}+s_{35})}{s_{14}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{B4b}^{-+++-} = & \left[ -\frac{s_{24}s_{23}^2}{s_{35}(s_{12}+s_{24})^2} + \frac{s_{23}(s_{23}+s_{24})}{(s_{12}+s_{24})^2} - \frac{s_{24}s_{23}^2}{s_{14}s_{35}(s_{12}+s_{24})} + \frac{(s_{34}-2s_{35})(s_{24}+s_{14})}{s_{34}(s_{23}+s_{35})} \right. \\
& + \frac{(s_{23}-s_{24})(s_{23}+s_{24})}{s_{24}(s_{12}+s_{24})} + \frac{(s_{24}s_{35}+s_{14}s_{23}+s_{23}s_{24})^2}{s_{34}^2s_{14}(s_{23}+s_{35})} + \frac{s_{24}s_{35}}{s_{14}(s_{23}+s_{35})} + \frac{s_{23}s_{24}}{s_{14}(s_{12}+s_{24})} \\
& - \frac{s_{15}^2(2s_{14}+s_{24})}{s_{24}^2s_{35}} + \frac{s_{24}(s_{35}+s_{24})}{s_{14}s_{34}} - \frac{s_{34}(2s_{23}-s_{34}+5s_{35})}{s_{24}s_{14}} + \frac{(3s_{23}+9s_{34}+6s_{24})}{s_{24}} \\
& \left. - \frac{2s_{34}^2s_{35}}{s_{24}^2s_{14}} + \frac{4s_{34}(s_{23}+s_{34})}{s_{24}^2} + \frac{(3s_{24}+2s_{14})}{s_{34}} - \frac{(3s_{23}-3s_{34}+3s_{35}-2s_{24})}{s_{14}} \right]
\end{aligned}$$

Finally the constant term reads

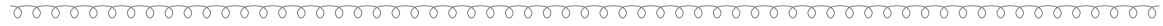
$$\mathcal{A}_1^{-+++-} = \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_1^- \mathcal{F}_5^-) \text{Tr}(\mathcal{F}_3^+ \mathcal{F}_4^+)}{s_{15}^2 s_{34}^2} [C_1^{-+++-} p_1 \cdot \mathcal{F}_2^+ \cdot p_3 - (3 \leftrightarrow 4)]$$

$$\begin{aligned}
C_1^{-+++} = & \left[ -\frac{3s_{24}(2s_{24} - 2s_{35} - s_{45})}{s_{23}^2} + \frac{s_{12}s_{45}}{s_{23}^2} - \frac{s_{12}(2s_{12} - 3s_{35} + 6s_{24})}{s_{23}^2} - \frac{(s_{23} + s_{24})s_{35}s_{23}}{s_{24}^2(s_{12} + s_{24})} \right. \\
& - \frac{s_{45}^2 s_{24}}{s_{12}s_{35}(s_{34} + s_{45})} + \frac{s_{24}(s_{23} + s_{35})^2}{s_{45}s_{12}(s_{12} + s_{23})} + \frac{s_{24}^3 s_{45}}{s_{12}s_{23}^2(s_{12} + s_{23})} + \frac{s_{24}^2(s_{24} - 3s_{35})}{s_{12}s_{23}(s_{12} + s_{23})} \\
& - \frac{s_{24}(3s_{45}s_{24} + 3s_{45}s_{35} + 2s_{35}^2)}{s_{12}s_{45}s_{23}} - \frac{2s_{35}^2 s_{24}}{s_{23}(s_{23} + s_{13})s_{45}} + \frac{(s_{23} + s_{24} + s_{35})}{(s_{12} + s_{23})} + \frac{s_{35}^2 s_{24}}{s_{12}s_{45}^2} \\
& + \frac{(s_{35} + 2s_{13} - 2s_{23})}{s_{24}} - \frac{(2s_{24} - 2s_{25})}{s_{23}} + \frac{(s_{23} + s_{24})(s_{23} - s_{24} - 2s_{45})}{s_{12}(s_{12} + s_{24})} - \frac{s_{35}(s_{23} + s_{24})}{s_{23}(s_{12} + s_{24})} \\
& - \frac{s_{45}(s_{24} - s_{45})}{s_{35}(s_{34} + s_{45})} + \frac{s_{24}(s_{24} + 2s_{35})}{s_{23}(s_{12} + s_{23})} + \frac{s_{24}s_{35}}{s_{45}(s_{23} + s_{13})} + \frac{s_{35}^2 s_{24}}{s_{45}^2(s_{23} + s_{13})} - \frac{s_{24}(s_{23} - s_{35})}{s_{12}s_{45}} \\
& + \frac{s_{35}(s_{23} - s_{35})^2}{s_{23}^2(s_{23} + s_{13})} - \frac{s_{24}^2(2s_{24} - 3s_{35} - 3s_{45})}{s_{12}s_{23}^2} - \frac{s_{23}(-2s_{45} - 3s_{35} + 2s_{23})}{s_{24}s_{12}} \\
& \left. + \frac{s_{23}^2 s_{35}}{s_{12}s_{24}^2} + \frac{s_{45}(3s_{24} - s_{45})}{s_{12}s_{35}} + \frac{s_{13}(s_{13} - 2s_{24})}{s_{24}s_{35}} - \frac{(-s_{24} + s_{45} + 3s_{23})}{s_{12}} - \frac{s_{14}(-s_{23} + s_{14})^2}{s_{45}s_{23}^2} \right]
\end{aligned}$$

## 4 Summary

We have presented a calculation of the one-loop amplitude  $\gamma\gamma ggg \rightarrow 0$ . By applying the spinor helicity method a decomposition in helicity amplitudes was obtained which in the end were reexpressed in terms of field strength tensors. We have derived useful relations for invariants built out of field strength tensors to switch between different field strength representations. This approach avoids complex-valued spinor products in the numerical evaluation of cross sections. Two independent algebraic programs have been designed with different implementations of the spinor helicity framework. We find agreement of both results. Further we have checked the Bose symmetries of the given helicity amplitudes. The Ward identities are manifestly fulfilled in the given representation. The decomposition of the algebraic expressions in terms of an appropriate function basis leads to a very efficient organization of the calculation which is fully automated by using algebraic programs. The final result is compact which suggests that our method is well designed to deal with more complex amplitudes. A phenomenological application of our calculation will be provided elsewhere.





## Acknowledgment

This work was supported by the Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF, Bonn, Germany) under the contract number 05HT4WWA2.

---

# Bibliographie

- [1] Z. Bern, L.J. Dixon and D.A. Kosower, “One loop corrections to five gluon amplitudes”, Phys. Rev. Lett. 70 (1993), 2677.
- [2] Z. Kunszt, A. Signer and Z. Trocsanyi, “One loop radiative corrections to the helicity amplitudes of QCD processes involving four quarks and one gluon”, Phys. Lett. B 336 (1994), 529.
- [3] Z. Bern, L. J. Dixon and D. A. Kosower, “One-loop amplitudes for  $e^+ e^-$  to four partons”, Nucl. Phys. B 513 (1998), 3.
- [4] Y. Yasui, “Five-parton amplitudes with two-quark and two-photon at next-to-leading order”, Phys. Rev. D 66 (2002), 094012.
- [5] L. Reina, S. Dawson and D. Wackeroth, “QCD corrections to associated  $t$  anti- $t$   $h$  production at the Tevatron”, Phys. Rev. D 65 (2002) 053017.
- [6] W. Beenakker, S. Dittmaier, M. Kramer, B. Plumper, M. Spira and P.M. Zerwas, “NLO QCD corrections to  $t$  anti- $t$   $H$  production in hadron collisions. ((U))”, Nucl. Phys. B 653 (2003), 151.
- [7] W. Beenakker, S. Dittmaier, M. Kramer, B. Plumper, M. Spira and P.M. Zerwas, “Higgs radiation off top quarks at the Tevatron and the LHC,”, Phys. Rev. Lett. 87 (2001), 201805.
- [8] G. Belanger *et al.*, “Full  $O(\alpha)$  electroweak corrections to double Higgs-strahlung at the linear collider”, Phys. Lett. B 576 (2003), 152.
- [9] G. Belanger, F. Boudjema, J. Fujimoto, T. Ishikawa, T. Kaneko, K. Kato and Y. Shimizu, “Full one-loop electroweak radiative corrections to single Higgs production in  $e^+ e^-$ ”, Phys. Lett. B 559 (2003), 252.
- [10] G. Belanger *et al.*, “Full  $O(\alpha)$  electroweak and  $O(\alpha(s))$  corrections to  $e^+ e^- \rightarrow t$  anti- $t$   $H$ ”, Phys. Lett. B 571 (2003), 163.

- 
- [11] T. Binoth, “Progress in calculating hexagon amplitudes at one-loop”, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 116 (2003), 387.
- [12] T. Binoth, J.-P. Guillet, G. Heinrich and C. Schubert, “Calculation of 1-loop hexagon amplitudes in the Yukawa model”, Nucl. Phys. B 615 (2001), 385.
- [13] G. Mahlon, “Multi - gluon helicity amplitudes involving a quark loop”, Phys. Rev. D 49 (1994), 4438.
- [14] G. Mahlon, “One loop multi - photon helicity amplitudes”, Phys. Rev. D 49 (1994), 2197.
- [15] Z. Bern, G. Chalmers, L.J. Dixon and D.A. Kosower, “One loop N gluon amplitudes with maximal helicity violation via collinear limits”, Phys. Rev. Lett. 72 (1994), 2134.
- [16] Z. Bern, L.J. Dixon, D.C. Dunbar and D.A. Kosower, “Fusing gauge theory tree amplitudes into loop amplitudes”, Nucl. Phys. B 435 (1995), 59.
- [17] Z. Bern, L. J. Dixon, D.C. Dunbar and D.A. Kosower, “One Loop N Point Gauge Theory Amplitudes, Unitarity And Collinear Limits”, Nucl. Phys. B 425 (1994), 217.
- [18] Z. Bern, L.J. Dixon, M. Perelstein and J.S. Rozowsky, “One-loop n-point helicity amplitudes in (self-dual) gravity,”, Phys. Lett. B 444 (1998), 273.
- [19] D. de Florian and Z. Kunszt, “Two photons plus jet at LHC : The NNLO contribution from the  $g g$  initiated process”, Phys. Lett. B 460 (1999), 184.
- [20] V. Del Duca, F. Maltoni, Z. Nagy and Z. Trocsanyi, “QCD radiative corrections to prompt diphoton production in association with a jet at hadron colliders”, JHEP 0304 (2003), 059.
- [21] Z. Bern, L. Dixon and C. Schmidt, “Isolating a light Higgs boson from the di-photon background at the LHC”, Phys. Rev. D 66 (2002), 074018.
- [22] Z. Xu, D.H. Zhang and L. Chang, “Helicity Amplitudes For Multiple Bremsstrahlung In Massless Non-Abelian Gauge Theories”, Nucl. Phys. B 291 (1987), 392.
- [23] Z. Bern, L.J. Dixon and D.A. Kosower, “Progress in one-loop QCD computations”, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 46 (1996), 109.
- [24] C. Schubert, “Perturbative quantum field theory in the string-inspired formalism”, Phys. Rept. 355 (2001), 73.
- [25] R. Pittau, “A simple method for multi-leg loop calculations”, Comput. Phys. Commun. 104 (1997), 23.
- [26] R. Pittau, “A simple method for multi-leg loop calculations. II : A general algorithm”, Comput. Phys. Commun. 111 (1998), 48.
- [27] S. Weinzierl, “Reduction of multi-leg loop integrals”, Phys. Lett. B 450 (1999), 234.
- [28] A. Denner and S. Dittmaier, “Reduction of one-loop tensor 5-point integrals”, Nucl. Phys. B 658 (2003), 175.
- [29] J.A.M. Vermaseren, “New features of FORM”, math-ph/0010025.
- [30] T. Binoth, J.-P. Guillet and G. Heinrich, “Reduction formalism for dimensionally regulated one-loop N-point integrals”, Nucl. Phys. B 572 (2000), 361.

- 
- [31] G. Heinrich and T. Binoth, “A general reduction method for one-loop N-point integrals”, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 89 (2000), 246.
- [32] Z. Bern, L.J. Dixon and D.A. Kosower, “Dimensionally regulated one loop integrals”, Phys. Lett. B 302 (1993), 299 [Erratum-ibid. B 318 (1993), 649].
- [33] MAPLE, <http://www.maplesoft.com>
- [34] S. Alekhin et al., Workshop “Physics at TeV Colliders”, Les Houches, France, 21 May - 1 June 2001, hep-ph/0204316.



## Chapitre 6

# Etude phénoménologique

### 6.1 Introduction

Nous venons de présenter au chapitre précédent le calcul de l'amplitude correspondant à la réaction  $\gamma\gamma ggg \rightarrow 0$ , ainsi que les résultats pour les six configurations d'hélicités indépendantes, dans lesquels nous avons fait apparaître explicitement l'invariance de jauge à l'aide des tenseurs de champ électromagnétique. Si l'on souhaite maintenant calculer la section efficace correspondant à  $gg \rightarrow \gamma\gamma g$ , il est nécessaire de connaître la probabilité de réaction, c'est-à-dire le carré de l'amplitude.

Dans la suite sera présenté tout d'abord le calcul du carré de l'amplitude, basé en particulier sur les propriétés des produits spinoriels. Nous étudierons ensuite le comportement des amplitudes aux limites colinéaires. Ces études ont abouti sur deux codes informatiques : un code analytique FORM/MAPLE, et un code numérique FORTRAN. Le calcul numérique nécessite une grande précision pour s'affranchir des possibles divergences numériques, et une librairie multiprécision a été implémentée. Enfin, ces procédures numériques sont insérées dans le générateur Monte Carlo DIPHOX, dans le but d'effectuer des études dans l'approximation NLO.

### 6.2 Carré de l'amplitude et section efficace

Nous allons maintenant chercher à évaluer le carré de l'amplitude. La méthode standard consiste à sommer les amplitudes puis à en prendre le carré. Par contre, les configurations d'hélicités sont orthogonales dans la méthode amplitude d'hélicité, et les termes d'in-

terférence sont donc nuls. Ainsi, il est aussi possible de sommer le carré des amplitudes de chaque configuration, et on a :

$$|\sum \mathcal{A}^{\lambda_1, \dots, \lambda_5}|^2 = \sum |\mathcal{A}^{\lambda_1, \dots, \lambda_5}|^2 . \quad (6.1)$$

Il faudra tout d'abord obtenir les 32 amplitudes correspondant aux 32 configurations d'hélicités possibles. Pour cela, on utilisera les propriétés de symétrie de ces amplitudes (voir le paragraphe 5.2.1).

Pour effectuer le calcul du carré de l'amplitude, deux approches s'offrent à nous : soit une approche analytique, soit une approche numérique, qui correspondent à des techniques de calcul différentes.

Dans l'approche analytique, nous allons calculer le carré de l'amplitude de chaque configuration séparément. Dans l'approche numérique, les deux méthodes de calcul sont possibles. Ces procédures seront détaillées dans la suite.

Nous avons considéré jusqu'à présent le cas où toutes les particules sont entrantes. Il s'agit bien entendu d'un cas non physique, et il sera donc nécessaire de passer au cas physique  $gg \rightarrow \gamma\gamma g$  en changeant le signe des impulsions et les hélicités des particules entrantes. Le passage au cas physique pourra s'effectuer à n'importe quelle étape du calcul. Nous allons continuer à considérer dans la suite le cas non-physique.

### 6.2.1 Calcul du carré de l'amplitude

Les résultats que nous avons obtenu au chapitre précédent ont été écrits en fonction des tenseurs de champ électromagnétique et ont donc une forme agréable et clairement invariante de jauge. Nous allons maintenant voir que cette écriture n'apporte pas d'inconvénient dans calcul de l'amplitude au carré.

Les amplitudes ont une structure contenant des termes en  $\text{Tr}(\mathcal{F}_i^+ \mathcal{F}_j^+)$ ,  $p_i \cdot \mathcal{F}_k^+ \cdot p_j$  avec des coefficients réels ou complexes. On va tout d'abord commencer par écrire ces termes en fonction des produits spinoriels.

On utilise pour cela la définition des tenseurs de champ électromagnétique :

$$\mathcal{F}_j^{\mu\nu} = p_j^\mu \epsilon_j^\nu - p_j^\nu \epsilon_j^\mu . \quad (6.2)$$

On obtient donc :

$$\text{Tr}(\mathcal{F}_i^+ \mathcal{F}_j^+) = 2 \left( (p_i \cdot \epsilon_j^+) (p_j \cdot \epsilon_i^+) - p_i \cdot p_j (\epsilon_i^+ \cdot \epsilon_j^+) \right) . \quad (6.3)$$

On reprend aussi la définition des  $\epsilon$  :

$$\epsilon_\mu^+(p, r) = \frac{\langle r_- | \gamma_\mu | p_- \rangle}{\sqrt{2} \langle r_- | p_+ \rangle} , \quad \epsilon_\mu^-(p, r) = \frac{\langle r_+ | \gamma_\mu | p_+ \rangle}{\sqrt{2} \langle r_- | p_+ \rangle^*} . \quad (6.4)$$

Puisque ces  $\epsilon$  sont définis en fonction de vecteurs de références arbitraires, le résultat ne

doit pas dépendre du choix de ces vecteurs (on vérifiera ceci dans la suite). L'équation précédente devient :

$$\text{Tr}(\mathcal{F}_i^+ \mathcal{F}_j^+) = \frac{\langle p_j + |p_i - \rangle}{\langle r_j - |p_j + \rangle \langle r_i - |p_i + \rangle} \left( \langle r_j - |p_i + \rangle \langle p_i + |p_j - \rangle \langle r_i - |p_j + \rangle - 2 p_i \cdot p_j \langle r_i + |r_j - \rangle \right) .$$

En utilisant la formule (4.31), on peut montrer que :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathcal{F}_i^+ \mathcal{F}_j^+) &= \frac{\langle p_j + |p_i - \rangle}{\langle r_j - |p_j + \rangle \langle r_i - |p_i + \rangle} \left( \langle r_j - |p_j + \rangle \langle r_i - |p_i + \rangle \langle r_i + |p_j \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle r_j - |r_i + \rangle \langle p_i - |p_j + \rangle \langle p_i + |p_j - \rangle - 2 p_i \cdot p_j \langle r_i + |r_j - \rangle \right) . \end{aligned} \quad (6.5)$$

Ainsi, on trouve finalement la formule :

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathcal{F}_i^+ \mathcal{F}_j^+) &= \langle p_j + |p_i - \rangle \langle p_i + |p_j - \rangle = -(\langle p_j + |p_i - \rangle)^2 \\ &= -(\langle p_i p_j \rangle^*)^2 . \end{aligned} \quad (6.6)$$

De la même manière, on peut montrer que :

$$\text{Tr}(\mathcal{F}_i^- \mathcal{F}_j^-) = -(\langle p_i p_j \rangle)^2 , \quad (6.7)$$

et

$$\text{Tr}(\mathcal{F}_i^+ \mathcal{F}_j^+ \mathcal{F}_k^+) = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle p_i p_j \rangle^* \langle p_j p_k \rangle^* \langle p_k p_i \rangle^* . \quad (6.8)$$

Avec un calcul similaire, on obtient aussi :

$$p_i \cdot \mathcal{F}_k^+ \cdot p_j = \frac{1}{2\sqrt{2}} \langle p_i p_j \rangle \langle p_i p_k \rangle^* \langle p_k p_j \rangle^* , \quad (6.9)$$

$$p_i \cdot \mathcal{F}_k^- \cdot p_j = \frac{1}{2\sqrt{2}} \langle p_i p_j \rangle^* \langle p_i p_k \rangle \langle p_k p_j \rangle . \quad (6.10)$$

Ces expressions ont une forme simple et ne dépendent clairement pas des vecteurs de références. Elles nous seront utiles dans le calcul du carré des amplitudes.



On peut réécrire les amplitudes sous la forme<sup>1</sup> :

$$\mathcal{A}^{+++++} = \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_1^+ \mathcal{F}_2^+) \text{Tr}(\mathcal{F}_3^+ \mathcal{F}_4^+ \mathcal{F}_5^+)}{2 s_{34} s_{45} s_{35}} \quad (6.11)$$

$$\mathcal{A}^{-++++} = \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_2^+ \mathcal{F}_3^+) \text{Tr}(\mathcal{F}_4^+ \mathcal{F}_5^+)}{s_{23}^2 s_{45}^2} \left( C_1^{-++++} (p_2 \cdot \mathcal{F}_1^- \cdot p_4) + C_2^{-++++} (p_2 \cdot \mathcal{F}_1^- \cdot p_5) \right) \quad (6.12)$$

$$\mathcal{A}^{++++-} = \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_1^+ \mathcal{F}_2^+) \text{Tr}(\mathcal{F}_3^+ \mathcal{F}_4^+)}{s_{12}^2 s_{34}^2} \left( C_1^{++++-} (p_1 \cdot \mathcal{F}_5^+ \cdot p_3) + C_2^{++++-} (p_1 \cdot \mathcal{F}_5^+ \cdot p_4) \right) \quad (6.13)$$

$$\mathcal{A}^{--+++} = \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_1^- \mathcal{F}_2^-) \text{Tr}(\mathcal{F}_3^+ \mathcal{F}_4^+)}{s_{12}^2 s_{34}^2} \left( C_1^{--+++} (p_3 \cdot \mathcal{F}_5^+ \cdot p_2) + C_2^{--+++} (p_3 \cdot \mathcal{F}_5^+ \cdot p_1) \right) \quad (6.14)$$

$$\mathcal{A}^{+++--} = \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_1^+ \mathcal{F}_2^+) \text{Tr}(\mathcal{F}_4^- \mathcal{F}_5^-)}{s_{12}^2 s_{45}^2} \left( C_1^{+++--} (p_4 \cdot \mathcal{F}_3^+ \cdot p_2) + C_2^{+++--} (p_4 \cdot \mathcal{F}_3^+ \cdot p_1) \right) \quad (6.15)$$

$$\mathcal{A}^{-+++-} = \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_2^+ \mathcal{F}_3^+) \text{Tr}(\mathcal{F}_1^- \mathcal{F}_5^-)}{s_{23}^2 s_{15}^2} \left( C_1^{-+++-} (p_2 \cdot \mathcal{F}_4^+ \cdot p_5) + C_2^{-+++-} (p_2 \cdot \mathcal{F}_4^+ \cdot p_3) \right) \quad (6.16)$$

On obtient les coefficients  $C_1$  et  $C_2$  en utilisant les  $C$  de la section (5.3). Notons que dans le cas des configurations avec une seule hélicité négative, ces coefficients ne contiennent que des produits scalaires. Par contre, pour les amplitudes avec deux polarisations négatives, il existe plusieurs types de termes : termes logarithmiques (provenant des fonctions à deux points), intégrales à 6 dimensions (fonctions à quatre points) et termes constants. On peut trouver une structure en fonction du tenseur  $\mathcal{F}$  commune à tous ces termes, qui permet d'obtenir une écriture simplifiée, comme présentée ci-dessus, au détriment de la simplicité des coefficients  $C_i$ , qui contiennent cette fois-ci aussi des termes logarithmiques et des intégrales à 6 dimensions.

En utilisant les formules (6.6) à (6.10), il devient très simple de calculer les carrés des termes en  $\mathcal{F}$ . Dans le cas de  $\mathcal{A}^{-++++}$  et  $\mathcal{A}^{++++-}$ , les coefficients  $C_1$  et  $C_2$  sont réels, ce qui simplifie le calcul du carré. Etudions par exemple avec plus de détails le cas de  $\mathcal{A}^{-++++}$ . Le carré de cette amplitude s'écrit :

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}^{-++++}|^2 &= (\mathcal{A}^{-++++})(\mathcal{A}^{-++++})^* \\ &= \frac{1}{(s_{23}^2 s_{45}^2)^2} \left( \text{Tr}(\mathcal{F}_2^+ \mathcal{F}_3^+) \text{Tr}(\mathcal{F}_4^+ \mathcal{F}_5^+) \right) \left( \text{Tr}(\mathcal{F}_2^- \mathcal{F}_3^-) \text{Tr}(\mathcal{F}_4^- \mathcal{F}_5^-) \right) \\ &\quad \times \left( C_1 (p_2 \cdot \mathcal{F}_1^- \cdot p_4) + C_2 (p_2 \cdot \mathcal{F}_1^- \cdot p_5) \right) \\ &\quad \times \left( C_1 (p_2 \cdot \mathcal{F}_1^+ \cdot p_4) + C_2 (p_2 \cdot \mathcal{F}_1^+ \cdot p_5) \right) , \end{aligned} \quad (6.17)$$

où nous avons omis la notation  $(-++++)$  des  $C$  pour alléger les notations. En utilisant les

---

<sup>1</sup>Nous avons vu dans le paragraphe 2.4 de l'article que la représentation en fonction du tenseur  $\mathcal{F}$  n'est pas unique.

relations (6.6) à (6.10), on obtient :

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{A}^{-++++}|^2 = & \frac{1}{(s_{23}^2 s_{45}^2)^2} \left[ C_1^2 (s_{23})^2 (s_{45}^2)^2 \frac{1}{8} s_{34} s_{12} s_{14} \right. \\
 & + C_2^2 (s_{23})^2 (s_{45}^2)^2 \frac{1}{8} s_{25} s_{12} s_{15} \\
 & + C_1 C_2 (s_{23})^2 (s_{45}^2)^2 \frac{s_{12}}{8} \left( \langle p_2 p_4 \rangle \langle p_3 p_4 \rangle^* \langle p_2 p_5 \rangle^* \langle p_3 p_5 \rangle \right. \\
 & \left. \left. + \langle p_2 p_4 \rangle^* \langle p_3 p_4 \rangle \langle p_2 p_5 \rangle \langle p_3 p_5 \rangle^* \right) \right] .
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

On peut concaténer les produits spinoriels pour obtenir des traces. Le terme contenant les produits spinoriels de l'équation (6.18) devient alors :

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}(\Pi_- \not{p}_2 \not{p}_4 \not{p}_1 \not{p}_5) + \text{Tr}(\Pi_+ \not{p}_2 \not{p}_4 \not{p}_1 \not{p}_5) &= \text{Tr}(\not{p}_2 \not{p}_4 \not{p}_1 \not{p}_5) \\
 &= (s_{24} s_{15} + s_{25} s_{14} - s_{23} s_{45}) .
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$|\mathcal{A}^{-++++}|^2 = \frac{s_{12}}{8 (s_{23}^2 s_{45}^2)} \left[ C_1^2 s_{34} s_{14} + C_2^2 s_{25} s_{15} + C_1 C_2 (s_{24} s_{15} + s_{25} s_{14} - s_{23} s_{45}) \right] ,$$

où, en utilisant les résultats de la section (5.3) de l'article :

$$\begin{aligned}
 C_1^{-++++} &= -\frac{s_{15} s_{12}}{s_{24} s_{35}} - \frac{s_{15}}{s_{35}} + \frac{s_{23}}{s_{24}} - \frac{s_{15}}{s_{34}} , \\
 C_2^{-++++} &= \frac{s_{14} s_{12}}{s_{25} s_{34}} + \frac{s_{14}}{s_{34}} - \frac{s_{23}}{s_{25}} + \frac{s_{14}}{s_{35}} .
 \end{aligned}$$

De manière similaire, on peut calculer le carré des autres amplitudes. Le carré des amplitudes avec deux polarisations négatives est cependant plus compliqué à calculer, car les coefficients  $C$  sont cette fois-ci complexes. Puisque  $C_1 C_2^* \neq C_1^* C_2$ , des termes contenant des tenseurs  $\varepsilon$  vont alors apparaître. La procédure reste cependant la même.

Les termes logarithmiques et les  $J^{n+2}$  peuvent avoir une partie complexe. On traite les logarithmes de la manière suivante :

$$\ln(x \pm i\lambda) = \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ \ln(|x|) \pm i\pi & \text{si } x < 0 \end{cases} \tag{6.19}$$

En ce qui concerne les intégrales à six dimensions, elles s'écrivent, d'une manière générale :

$$J^{n+2}(a, b, c) = Li_2\left(1 - \frac{c}{a}\right) + Li_2\left(1 - \frac{c}{b}\right) - Li_2\left(-\frac{b}{a}\right) - Li_2\left(-\frac{a}{b}\right) . \tag{6.20}$$

En utilisant les propriétés des  $Li_2$  (voir paragraphe A.4), on peut mettre en évidence la partie imaginaire :

$$J^{n+2}(\bar{s}_{ij}, \bar{s}_{kl}, \bar{s}_{mn}) = Li_2\left(1 - \frac{s_{mn}}{s_{ij}}\right) + Li_2\left(1 - \frac{s_{mn}}{s_{kl}}\right) + \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{s_{ij}}{s_{kl}}\right) , \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} J^{n+2}(\bar{s}_{ij}, -\bar{s}_{kl}, \bar{s}_{mn}) &= Li_2\left(1 - \frac{s_{mn}}{s_{ij}}\right) - Li_2\left(\frac{s_{kl}}{s_{kl} + s_{mn}}\right) - \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{s_{kl}}{s_{kl} + s_{mn}}\right) \\ &\quad - i\pi \ln\left(\frac{s_{kl}}{s_{kl} + s_{mn}}\right) + \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{s_{kl}}{s_{ij}}\right) + i\pi \ln\left(\frac{s_{kl}}{s_{ij}}\right) , \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} J^{n+2}(-\bar{s}_{ij}, \bar{s}_{kl}, -\bar{s}_{mn}) &= Li_2\left(1 - \frac{s_{mn}}{s_{ij}}\right) - Li_2\left(\frac{s_{kl}}{s_{kl} + s_{mn}}\right) - \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{s_{kl}}{s_{kl} + s_{mn}}\right) \\ &\quad + i\pi \ln\left(\frac{s_{kl}}{s_{kl} + s_{mn}}\right) + \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{s_{ij}}{s_{kl}}\right) + i\pi \ln\left(\frac{s_{ij}}{s_{kl}}\right) , \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} J^{n+2}(\bar{s}_{ij}, -\bar{s}_{kl}, -\bar{s}_{mn}) &= Li_2\left(1 - \frac{s_{mn}}{s_{kl}}\right) - Li_2\left(\frac{s_{ij}}{s_{ij} + s_{mn}}\right) - \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{s_{ij}}{s_{ij} + s_{mn}}\right) \\ &\quad + i\pi \ln\left(\frac{s_{ij}}{s_{ij} + s_{mn}}\right) + \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{s_{ij}}{s_{kl}}\right) - i\pi \ln\left(\frac{s_{ij}}{s_{kl}}\right) , \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} J^{n+2}(-\bar{s}_{ij}, -\bar{s}_{kl}, \bar{s}_{mn}) &= -Li_2\left(\frac{s_{ij}}{s_{ij} + s_{mn}}\right) - \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{s_{ij}}{s_{ij} + s_{mn}}\right) - i\pi \ln\left(\frac{s_{ij}}{s_{ij} + s_{mn}}\right) \\ &\quad - Li_2\left(\frac{s_{kl}}{s_{kl} + s_{mn}}\right) - \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{s_{kl}}{s_{kl} + s_{mn}}\right) \\ &\quad - i\pi \ln\left(\frac{s_{kl}}{s_{kl} + s_{mn}}\right) + \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{s_{ij}}{s_{kl}}\right) + \frac{5\pi^2}{6} , \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} J^{n+2}(-\bar{s}_{ij}, \bar{s}_{kl}, \bar{s}_{mn}) &= Li_2\left(1 - \frac{s_{mn}}{s_{kl}}\right) - Li_2\left(\frac{s_{ij}}{s_{ij} + s_{mn}}\right) - \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{s_{ij}}{s_{ij} + s_{mn}}\right) \\ &\quad - i\pi \ln\left(\frac{s_{ij}}{s_{ij} + s_{mn}}\right) + \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{s_{ij}}{s_{kl}}\right) + i\pi \ln\left(\frac{s_{ij}}{s_{kl}}\right) , \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} J^{n+2}(\bar{s}_{ij}, \bar{s}_{kl}, -\bar{s}_{mn}) &= -Li_2\left(\frac{s_{ij}}{s_{ij} + s_{mn}}\right) - \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{s_{ij}}{s_{ij} + s_{mn}}\right) + i\pi \ln\left(\frac{s_{ij}}{s_{ij} + s_{mn}}\right) \\ &\quad - Li_2\left(\frac{s_{kl}}{s_{kl} + s_{mn}}\right) - \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{s_{kl}}{s_{kl} + s_{mn}}\right) \\ &\quad + i\pi \ln\left(\frac{s_{kl}}{s_{kl} + s_{mn}}\right) + \frac{1}{2} \ln^2\left(\frac{s_{ij}}{s_{kl}}\right) + \frac{5\pi^2}{6} , \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$J^{n+2}(-\bar{s}_{ij}, -\bar{s}_{kl}, -\bar{s}_{mn}) = J^{n+2}(s_{ij}, s_{kl}, s_{mn}) , \quad (6.28)$$

avec  $\bar{s}_{ij} = -s_{ij} - i\lambda$ ,  $\lambda$  étant un réel infinitésimal positif et les  $s_{ij}$  étant tous considérés positifs. Le conjugué de ces fonctions s'écrit tout simplement en inversant le signe de tous les paramètres de l'argument :

$$[J^{n+2}(a, b, c)]^* = J^{n+2}(-a, -b, -c) , \quad (6.29)$$

où a,b et c sont des réels.

Le calcul du carré des amplitudes avec deux hélicités négatives est, comme nous l'avons déjà dit, plus compliqué, car la présence des  $\ln$  et des  $J^{n+2}$  va générer des termes supplémentaires. Néanmoins, la méthode reste la même pour ce calcul, et les résultats ne seront pas présentés ici.

### 6.2.2 Limites colinéaires

On considère que les deux photons (1 et 2) ont, pour être observables, une impulsion transverse assez élevée et ne peuvent pas être colinéaires. Au contraire, le gluon 5 (de l'état final) peut être mou ou colinéaire aux deux autres gluons, ce qui peut annuler certaines des variables de Mandelstam et donc poser d'importants problèmes de stabilité numérique lorsque ces variables existent dans le dénominateur des expressions. On étudie le comportement des amplitudes dans ces limites. On s'intéressera uniquement au cas où  $3//5$  (voir figure (6.1)), le cas  $4//5$  étant tout-à-fait similaire.

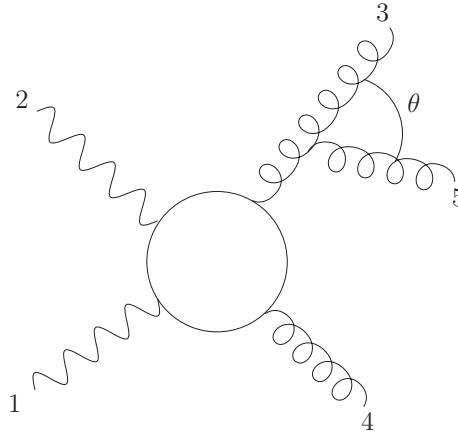


FIG. 6.1 – Graphe de Feynman avec deux gluons couplés. 3 et 5 peuvent être colinéaires.

Dans la situation où  $\theta \ll 1$ , on peut relier linéairement les quadrivecteur  $p_3$  et  $p_5$  à un même quadrivecteur  $P_{35}$  par :

$$p_3 = z P_{35} , \quad (6.30)$$

$$p_5 = (1 - z) P_{35} . \quad (6.31)$$

Ainsi, on a :

$$p_5 = \frac{(1 - z)}{z} p_3 , \quad (6.32)$$

et aussi<sup>2</sup> :

$$|p_5 \pm\rangle = \sqrt{\frac{1 - z}{z}} |p_3 \pm\rangle . \quad (6.33)$$

---

<sup>2</sup>On notera que les kets contiennent des phases (voir plus loin l'équation (6.53)), et que la relation suivante n'est valable que dans le cas où l'angle  $\theta$  entre 3 et 5 est petit.

La conservation d'énergie–impulsion donne :

$$p_1 + p_2 + \frac{p_3}{z} + p_4 = 0 \quad , \quad (6.34)$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} (p_1 + p_2 + p_4)^2 &= 0 \quad , \\ s_{14} + s_{24} &= -s_{12} \quad . \end{aligned} \quad (6.35)$$

On écrit les variables de Mandelstam en fonction de  $z$  :

$$s_{34} = 2 p_3 \cdot p_4 = 2 z p_4 \cdot P_{35} = z s_{12} \quad . \quad (6.36)$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} s_{13} &= z s_{24} \quad , \\ s_{15} &= \frac{(1-z)}{z} s_{13} \quad , \\ s_{23} &= z s_{14} \quad , \\ s_{45} &= (1-z) s_{12} \quad . \end{aligned} \quad (6.37)$$

Intéressons nous par exemple au cas de  $\mathcal{A}^{++++-}$  :

$$\mathcal{A}^{++++-} = \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_1^+ \mathcal{F}_2^+) \text{Tr}(\mathcal{F}_3^+ \mathcal{F}_4^+)}{s_{12}^2 s_{34}^2} \left( C(1, 2, 3, 4, 5) p_1 \cdot \mathcal{F}_5^- \cdot p_3 - C(1, 2, 4, 3, 5) p_1 \cdot \mathcal{F}_5^- \cdot p_4 \right) \quad (6.38)$$

On isole la partie en  $\frac{1}{s_{35}}$  des coefficients  $C$  (donnés dans l'équation (5.48) de l'article) :

$$\begin{aligned} C(1, 2, 3, 4, 5) &= \frac{1}{s_{35}} \left[ -\frac{s_{45} s_{13} s_{14}}{s_{15} s_{24}} - \frac{s_{13} s_{45}}{s_{15}} - \frac{s_{12}^2 + s_{45}^2 - s_{12} s_{45}}{s_{15}} \right] \quad , \\ C(1, 2, 4, 3, 5) &= \frac{1}{s_{35}} \frac{(s_{14} + s_{24})}{s_{14} s_{24}} (s_{14} s_{15} - s_{25} s_{24}) \quad . \end{aligned} \quad (6.39)$$

En utilisant le fait que toutes les variables de Mandelstam ne sont pas indépendantes (à cause de la conservation d'énergie–impulsion), on peut montrer que :

$$C(1, 2, 4, 3, 5) = \frac{1}{s_{35}} \frac{(s_{14} + s_{24})}{s_{14} s_{24}} (s_{15} s_{23} - s_{25} s_{13} + s_{35} s_{12}) \quad . \quad (6.40)$$

Le terme  $s_{15} s_{23} - s_{25} s_{13} + s_{35} s_{12}$  s'annule à la limite colinéaire comme  $\sqrt{s_{35}}$ . On peut l'écrire comme :

$$\begin{aligned} (s_{15} s_{23} - s_{25} s_{13} + s_{35} s_{12}) &= \text{Tr}(\Pi_+ \not{p}_1 \not{p}_5 \not{p}_3 \not{p}_2) + \text{Tr}(\Pi_- \not{p}_1 \not{p}_5 \not{p}_3 \not{p}_2) \quad (6.41) \\ &= \langle p_5 p_1 \rangle^* \langle p_5 p_3 \rangle \langle p_2 p_3 \rangle^* \langle p_2 p_1 \rangle \\ &\quad + \langle p_1 p_5 \rangle \langle p_3 p_5 \rangle^* \langle p_3 p_2 \rangle \langle p_1 p_2 \rangle^* \quad . \end{aligned}$$

En se servant des équations (6.37) et de la formule précédente, on trouve finalement :

$$C(1, 2, 4, 3, 5) = \frac{1}{s_{35}} \frac{(s_{14} + s_{24})}{s_{14}s_{24}} \sqrt{\frac{1-z}{z}} \left( \langle p_3 p_1 \rangle^* \langle p_2 p_3 \rangle^* \langle p_2 p_1 \rangle \langle p_5 p_3 \rangle \right. \\ \left. + \langle p_1 p_3 \rangle \langle p_3 p_2 \rangle \langle p_1 p_2 \rangle^* \langle p_3 p_5 \rangle^* \right) . \quad (6.42)$$

Intéressons nous maintenant à  $C(1, 2, 3, 4, 5)$ . En utilisant les formules du paragraphe (4.2.2), on obtient, après simplification :

$$C(1, 2, 3, 4, 5) = \frac{1}{s_{35}} \frac{s_{12}^2}{s_{13}} z \left( 2z - \frac{1}{1-z} \right) . \quad (6.43)$$

On écrit alors :

$$\frac{1}{s_{35}} = \frac{1}{\langle p_3 p_5 \rangle \langle p_3 p_5 \rangle^*} .$$

Il ne reste qu'à calculer  $(p_1 \cdot \mathcal{F}_5^- \cdot p_3)$  et  $(p_4 \cdot \mathcal{F}_5^- \cdot p_1)$ . On trouve :

$$p_1 \cdot \mathcal{F}_5^- \cdot p_3 = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1-z}{z}} s_{13} \langle p_3 p_5 \rangle , \quad (6.44)$$

qui s'annule comme  $\sqrt{s_{35}}$ , et

$$p_4 \cdot \mathcal{F}_5^- \cdot p_1 = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \frac{1-z}{z} \langle p_1 p_3 \rangle \langle p_4 p_1 \rangle^* \langle p_4 p_3 \rangle . \quad (6.45)$$

Ainsi l'équation (6.38) devient :

$$\mathcal{A}_{p_3//p_5}^{++++-} = \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_1^+ \mathcal{F}_2^+) \text{Tr}(\mathcal{F}_3^+ \mathcal{F}_4^+)}{s_{12}^2 s_{34}^2} \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1-z}{z}} \\ \times \left\{ \frac{-1}{\langle p_3 p_5 \rangle^*} \left[ s_{12}^2 z \left( 2z - \frac{1}{1-z} \right) + \frac{1-z}{z} \frac{s_{12}s_{13}}{s_{14}s_{24}} \langle p_3 + |\not{p}_2 \not{p}_1 \not{p}_4 | p_3 + \rangle \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{\langle p_3 p_5 \rangle} \frac{1-z}{z} \frac{s_{12}}{s_{14}s_{24}} \langle p_1 p_3 \rangle^2 \langle p_3 - |\not{p}_2 | p_1 - \rangle \langle p_1 + |\not{p}_4 | p_3 + \rangle \right\} . \quad (6.46)$$

On va écrire les produits spinoriels sous une forme plus adaptée. On peut montrer que :

$$\langle p_3 + |\not{p}_2 \not{p}_1 \not{p}_4 | p_3 + \rangle = -s_{12} s_{23} ,$$

et

$$\langle p_1 p_3 \rangle^2 \langle p_3 - |\not{p}_2 | p_1 - \rangle \langle p_1 + |\not{p}_4 | p_3 + \rangle = \langle p_3 - |\not{p}_2 | p_4 - \rangle \langle p_4 p_3 \rangle^2 \langle p_3 - |\not{p}_1 | p_4 - \rangle .$$

En remplaçant ces expressions dans (6.46), et en écrivant les variables de Mandelstam et les traces de  $\mathcal{F}$  en fonction de produits spinoriels, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{p_3//p_5}^{++++-} = & \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1-z}{z}} \left\{ \frac{1}{\langle p_3 p_5 \rangle^*} \left( \frac{z^2}{1-z} \right) \frac{\langle p_1 p_2 \rangle^*}{\langle p_1 p_2 \rangle} \frac{\langle p_3 p_4 \rangle^*}{\langle p_3 p_4 \rangle} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\langle p_3 p_5 \rangle} \left( \frac{1-z}{z} \right) \frac{\langle p_1 p_2 \rangle^*}{\langle p_1 p_2 \rangle} \frac{\langle p_1 p_3 \rangle}{\langle p_1 p_4 \rangle} \frac{\langle p_2 p_3 \rangle}{\langle p_2 p_4 \rangle} \right\} . \end{aligned} \quad (6.47)$$

En utilisant

$$\langle p_1 p_2 \rangle^* \langle p_1 p_3 \rangle = -\langle p_2 p_4 \rangle^* \langle p_3 p_4 \rangle ,$$

et en remplaçant  $|p_3 \pm\rangle$  par  $\sqrt{z}|P_{35} \pm\rangle$ , on trouve finalement :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{p_3//p_5}^{++++-} = & \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\langle p_3 p_5 \rangle^*} \frac{z^2}{\sqrt{z(1-z)}} \frac{\langle p_1 p_2 \rangle^*}{\langle p_1 p_2 \rangle} \frac{\langle P_{35} p_4 \rangle^*}{\langle P_{35} p_4 \rangle} \\ & + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\langle p_3 p_5 \rangle} \frac{(1-z)^2}{\sqrt{z(1-z)}} \frac{\langle P_{35} p_4 \rangle}{\langle p_1 p_2 \rangle} \frac{\langle P_{35} p_2 \rangle}{\langle p_1 p_4 \rangle} \frac{\langle p_2 p_4 \rangle^*}{\langle p_2 p_4 \rangle} . \end{aligned} \quad (6.48)$$

On peut faire deux remarques importantes :

- dans la limite où l'impulsion 3 est colinéaire à 5, l'amplitude se comporte comme  $\frac{1}{\langle p_3 p_5 \rangle}$ , donc comme  $1/\sqrt{s_{35}}$ .
- deux structures spinorielles apparaissent dans (6.48). On peut comparer ces structures avec l'amplitude de 2 gluons  $\rightarrow$  2 photons à une boucle [1]. La première structure :

$$\frac{\langle p_1 p_2 \rangle^*}{\langle p_1 p_2 \rangle} \frac{\langle P_{35} p_4 \rangle^*}{\langle P_{35} p_4 \rangle} ,$$

correspond en fait à l'amplitude de 2 gluons  $\rightarrow$  2 photons, avec des polarisations positives pour toutes les particules ( $\mathcal{A}^{++++}$ ), tandis que le deuxième terme :

$$\frac{\langle P_{35} p_4 \rangle}{\langle p_1 p_2 \rangle} \frac{\langle P_{35} p_2 \rangle}{\langle p_1 p_4 \rangle} \frac{\langle p_2 p_4 \rangle^*}{\langle p_2 p_4 \rangle} ,$$

correspond à l'amplitude  $\mathcal{A}^{++-+}$ . Par conséquent, le diagramme de la figure (6.1) apparaît, dans le cas colinéaire, comme une superposition d'un diagramme à 4 points avec l'hélicité 3 positive et d'un diagramme à 4 points avec l'hélicité 3 négative. Les coefficients  $z^2/\sqrt{z(1-z)}$  et  $(1-z)^2/\sqrt{z(1-z)}$  sont reliés aux fonctions de partition (splitting) [2, 3]. La première correspond au cas où un gluon d'hélicité positive engendre un gluon colinéaire d'hélicité positive et de fraction d'impulsion  $z$ , tandis que la deuxième correspond au cas où un gluon d'hélicité positive engendre un gluon colinéaire d'hélicité négative. En effet, on peut écrire l'amplitude sous la forme :

$$\mathcal{A}_{p_3//p_5}^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = \sum_{\lambda=\pm} S_{\lambda}(p_3^{\lambda_3}, p_5^{\lambda_5}) \mathcal{A}^{\lambda_1 \lambda_2 (-\lambda) \lambda_4}(p_1, p_2, p_3 + p_5, p_4) , \quad (6.49)$$

où  $\lambda$  désigne l'hélicité et  $S$  des fonctions de partition.

## 6.3 Code informatique

### 6.3.1 Code analytique

Le code analytique suit la méthode que nous venons de présenter. Plus précisément, on peut mettre en évidence trois étapes. La première étape se fait avec MAPLE. Après y avoir généré toutes les amplitudes et spécifié les coefficients, on donne la définition des traces et des produits scalaires de  $\mathcal{F}$ . On crée alors le complexe conjugué des amplitudes à partir des conjugués des produits spinoriels et des autres termes. On traite finalement les  $\ln$  et les  $J^{n+2}$ , et on définit le carré d'une amplitude comme le produit de l'amplitude par son conjugué.

Un deuxième code, écrit en FORM, est chargé du traitement des produits spinoriels. On utilise pour cela les relations des chapitres 4 et 5, de manière à construire des traces et à les calculer.

Un dernier code MAPLE rassemble les résultats, passe au cas physique et termine le calcul du carré des amplitudes. On y réalise aussi une évaluation numérique de manière à vérifier les résultats du code numérique.

### 6.3.2 Code numérique

Un code écrit en FORTRAN calcule la valeur de chaque amplitude, puis somme le carré des amplitudes.

Pour pouvoir calculer une amplitude numériquement, on a besoin de connaître entre autre les valeurs numériques des produits spinoriels. Pour cela, on utilise le formalisme et les relations définis dans [4].

Soit  $k^\mu$  un quadrivecteur tel que :

$$k^\mu = \begin{bmatrix} k_0 \\ k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} . \quad (6.50)$$

On introduit les notations :

$$k_\pm = k_0 \pm k_z , \quad (6.51)$$

et

$$k_\perp = k_x + i k_y = |k_\perp| e^{i\varphi_k} = \sqrt{k_+ k_-} e^{i\varphi_k} . \quad (6.52)$$

Par un choix convenable de la phase, on trouve :

$$|k_+\rangle = \begin{bmatrix} \sqrt{k_+} \\ \sqrt{k_-} e^{i\varphi_k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad (6.53)$$



et

$$|k_{-}\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{k_{-}}e^{-i\varphi_k} \\ -\sqrt{k_{+}} \end{bmatrix} , \quad (6.54)$$

Par conséquent, on a

$$\langle k_1 k_2 \rangle = \langle k_{1-} | k_{2+} \rangle = \sqrt{k_{1-} k_{2+}} e^{i\varphi_1} - \sqrt{k_{1+} k_{2-}} e^{i\varphi_2} . \quad (6.55)$$

Cette relation est explicitement antisymétrique et nous permet d'évaluer numériquement les valeurs des produits spinoriels. On peut aussi se trouver avec des produits spinoriels d'impulsions négatives (essentiellement lors du passage au cas physique). La formule suivante est utile [5, 6] dans ce cas :

$$\langle q_{\mp} | -p_{\pm} \rangle = \langle -q_{\mp} | p_{\pm} \rangle = i \langle q_{\mp} | p_{\pm} \rangle \quad (p_0, q_0 > 0) . \quad (6.56)$$

Ces relations sont utilisées dans le code numérique, qui permet de calculer la valeur de chaque amplitude. Il reste donc à calculer la norme au carré de chaque amplitude, et à en faire la somme.

On remarquera que la structure compliquée des amplitudes et le nombre de termes rendent difficiles les calculs dans le cas colinéaire. En effet, les calculs habituels avec 15 chiffres significatifs ne sont plus suffisants et donnent lieu à des divergences numériques lorsqu'on se rapproche du cas colinéaire. Pour pallier à ce problème, j'ai utilisé dans les calculs une librairie multiprécision [7] qui permet de choisir le nombre de chiffres significatifs. On notera que 50 chiffres significatifs suffisent amplement à éviter toute divergence numérique. Cette librairie permet le calcul des fonctions simples, mais il m'a été nécessaire de réécrire entre autre une fonction  $Li_2$  multiprécision. Un grand aspect positif des librairies multiprécisions concerne la haute précision et la stabilité remarquable des résultats aux limites colinéaires. Un aspect négatif provient néanmoins du temps de calcul, car les ordinateurs 32/64 bits ne sont pas optimisés pour ce genre de précision à multiples chiffres significatifs.

### 6.3.3 Implémentation dans DIPHOX

DIPHOX [8] est un code informatique générateur d'événements partoniques qui étudie la hadroproduction de diphotons. Plus précisément, il s'agit d'un programme du type Monte Carlo dont le but est le calcul d'observables inclusives à l'approximation NLO.

Après passage au cas physique (en inversant le signe de l'hélicité et de l'impulsion des particules que l'on souhaite dans l'état de sortie), le processus s'écrit :

$$g(p_1) + g(p_2) \longrightarrow \gamma(p_3) + \gamma(p_4) + g(p_5) . \quad (6.57)$$

Dans ce cadre, les seules colinéarités possibles arrivent si  $p_1 // p_5$  ou si  $p_2 // p_5$ . Pour isoler la partie contenant d'éventuelles singularités colinéaires ou infrarouges, on considère dans le

carré de l'amplitude le coefficient du terme :

$$E_{12} = \frac{p_1 \cdot p_2}{p_1 \cdot p_5 \, p_2 \cdot p_5} . \quad (6.58)$$

On appelle ce coefficient  $H_{12}(p_5)$ . Ainsi, on peut écrire l'amplitude au carré sous la forme suivante :

$$|M|^2 = H_{12}(p_5) E_{12} , \quad (6.59)$$

Ce  $H_{12}$  a pu être implémenté dans DIPHOX. L'intégration sur l'espace de phase à l'aide de DIPHOX permet d'obtenir la section efficace de notre réaction. Dans la section suivante, les résultats numériques ainsi obtenus sont présentés.

## 6.4 Résultats numériques

Les valeurs des sections efficaces présentées ici sont obtenues en utilisant DIPHOX, pour les coupures cinématiques de ATLAS et CMS [9], notamment pour l'impulsion transverse du photon le plus énergétique (photon 1)  $p_{T(\gamma_1)} > 40$  GeV et la rapidité  $|\eta| < 2.5$ . Le critère d'isolement des photons leur impose aussi une énergie déposée inférieure à  $E_{Tmax}$  dans un cône de rayon défini et orienté dans la direction du photon. Ces valeurs sont imposées par les expériences.

Pour les fonctions de distribution partonique nous avons utilisé le paramétrage cteq6 [10].

Sur la figure (6.2) est présentée la section efficace de production exclusive de deux photons et un jet en fonction de la masse invariante des deux photons, en imposant une impulsion transverse supérieure à 40 GeV pour le jet et les photons. On souhaite que les deux photons et le jet soient au moins séparés par une distance de 0.3 dans l'espace rapidité-angle azimutal. On impose ainsi :

$$\Delta R_{sep} = \sqrt{\Delta\phi^2 + \Delta\eta^2} > 0.3 , \quad (6.60)$$

où  $\phi$  est l'angle azimutal entre les photons.

Les échelles de factorisation et de renormalisation sont choisies telles que :

$$\mu^2 = M^2 = m_{\gamma\gamma}^2 + p_{T(jet)}^2 , \quad (6.61)$$

où  $m_{\gamma\gamma}$  est la masse invariante de la paire de photons. Les résultats obtenus sont en accord avec ceux de [11].

Sur la figure (6.3) est représentée la section efficace de production inclusive de deux photons, en fonction de l'impulsion transverse des photons. En appliquant les coupures cinématiques

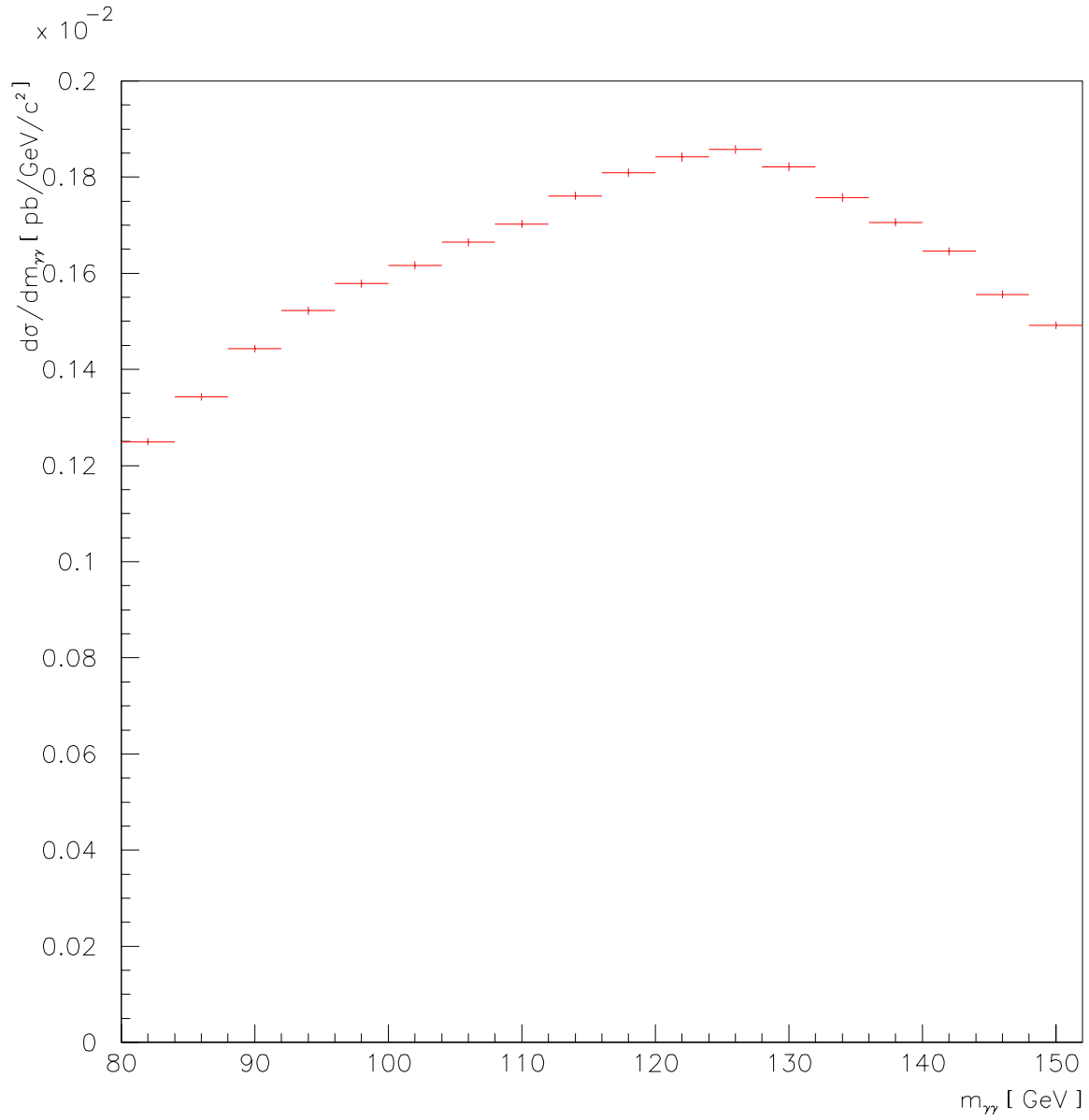


FIG. 6.2 – Section efficace de production exclusive de deux photons et un jet en fonction de la masse invariante des deux photons.

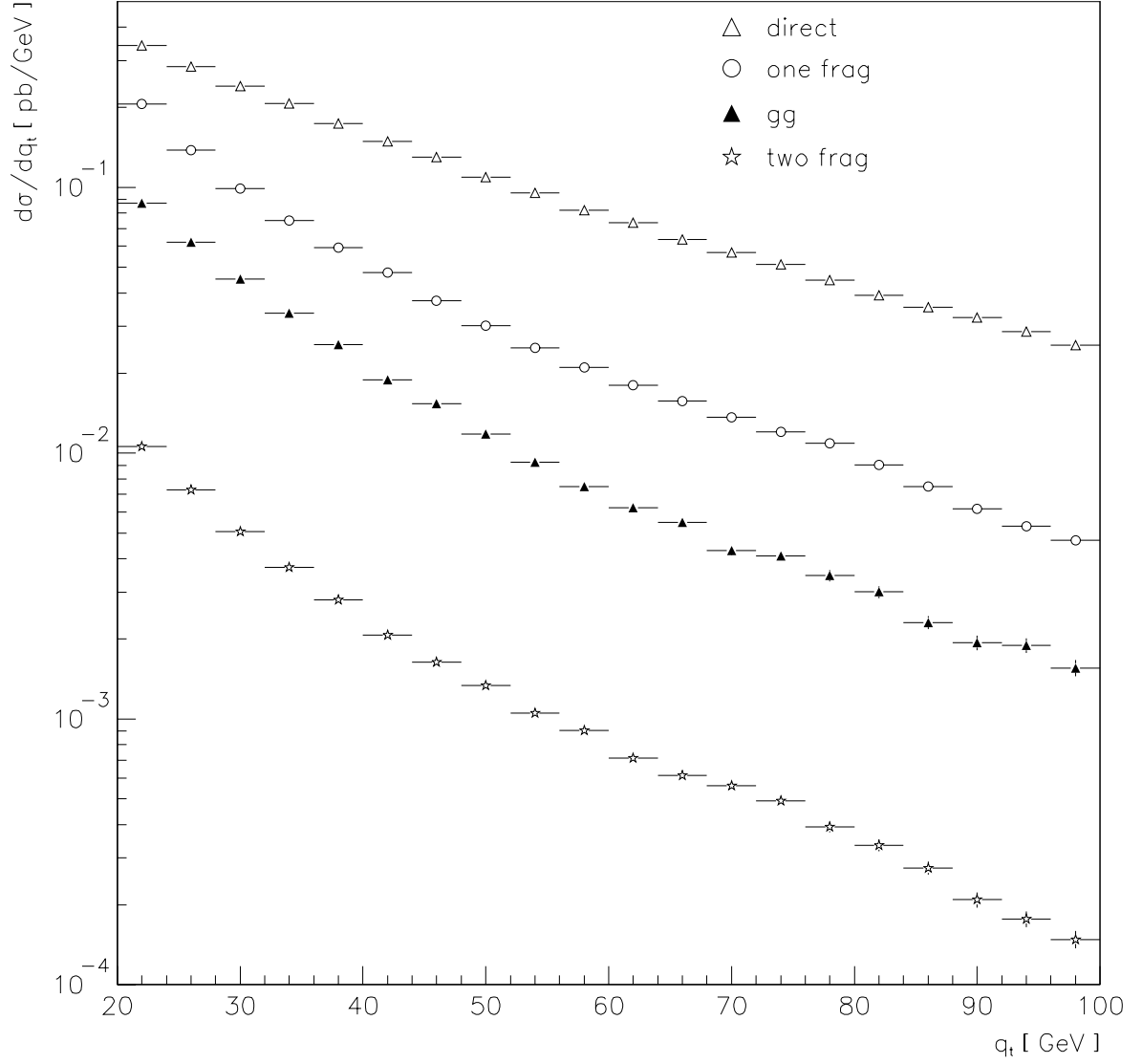


FIG. 6.3 – Section efficace de production inclusive de deux photons, en fonction de l'impulsion transverse des photons.

de ATLAS et CMS, on impose pour l'impulsion transverse du photon le plus énergétique (photon 1) :

$$p_{T(\gamma_1)} > 40 \text{ GeV} , \quad (6.62)$$

et pour l'impulsion transverse du photon moins énergétique (photon 2) :

$$p_{T(\gamma_2)} > 25 \text{ GeV} . \quad (6.63)$$

On choisit les échelles de renormalisation et de factorisation telles que :

$$\mu^2 = M^2 = \frac{1}{4} m_{\gamma\gamma}^2 . \quad (6.64)$$

Les courbes obtenues dépendent de l'échelle choisie. Comme critère d'isolement des photons, on impose cette fois-ci :

$$E_{Tmax} > 15 \text{ GeV} , \quad (6.65)$$

et, pour le rayon du cne d'isolement :

$$R = \sqrt{\Delta\phi^2 + \Delta\eta^2} > 0.4 . \quad (6.66)$$

Dans ce cas, on prend comme coupure  $q_T > 20 \text{ GeV}$  pour la paire de photons.

A titre de comparaison, les contributions des processus de photoproduction *directe*, *une fragmentation* et *deux fragmentations* sont aussi présentées sur la figure. On peut remarquer que la contribution de  $gg \rightarrow \gamma\gamma + jet$  est inférieure aux contributions directe et une fragmentation mais supérieure à la contribution de deux fragmentations.

---

# Bibliographie

- [1] Z. Bern, A. De Freitas et L. Dixon, “Two-Loop Amplitudes for Gluon Fusion into Two Photons”, JHEP, 0109, (2001), 037.
- [2] F.A. Berends et W.T. Giele, “Recursive calculations for processes with  $n$  gluons”, Nucl. Phys. B 306 (1988), 759.
- [3] Z. Bern, L. Dixon, D.C. Dunbar et D.A. Kosower, “One-Loop  $n$ -Point Gauge Theory Amplitudes, Unitarity and Collinear Limits”, Nucl. Phys. B 425 (1994), 217.
- [4] Z. Xu, D. Zhang et L. Chang, “Helicity amplitudes for multiple Bremsstrahlung in massless nonabelian gauge theories”, Nucl. Phys. B291 (1987), 392.
- [5] D. Danckaert, P. De Causmaecker, R. Gastmans, W. Troost et T.T. Wu, “Four-jet production in  $e+e-$  annihilation”, Phys. Lett. B 114 (1982), 203.
- [6] J.F. Gunion et Z. Kunszt, “Four-jet processes : Gluon-gluon scattering to non-identical quark-antiquark pairs”, Phys. Lett. B 159 (1985), 167.
- [7] D.H. Bailey, “A portable high performance multiprecision package”, RNR Technical Report RNR-90-022 (1993).  
<http://crd.lbl.gov/~dhbailey/mpdist/mpdist.html>
- [8] T. Binoth, J.Ph. Guillet, E. Pilon et M. Werlen, “A full Next to Leading Order study of direct photon pair production in hadronic collisions”, Eur. Phys. J. C 16 (2000), 311.
- [9] Collaboration CMS, “CMS, the Compact Muon Solenoid : technical proposal”, CERN-LHCC-94-38 (1994).  
Collaboration ATLAS, “ATLAS technical proposal”, CERN-LHCC-94-43 (1994).
- [10] J. Pumplin, D.R. Stump, J. Huston, H.L. Lai, P. Nadolsky et W.K. Tung, “New Generation of Parton Distributions with Uncertainties from Global QCD Analysis”, JHEP 0207 (2002), 012.

- 
- [11] D. de Florian et Z. Kunszt, “Two photons plus jet at LHC : The NNLO contribution from the g g initiated process”, Phys. Lett. B 460 (1999), 184.

---

## Conclusion et Perspectives

Les différentes réussites et la construction consistante du Modèle Standard en ont fait la Théorie Standard de la physique des particules. Il dépeint les constituants fondamentaux de la matière, les quarks et les leptons, et les interactions entre eux, unifiant dans une même théorie les interactions électromagnétique, faible et forte. Le boson de Higgs reste le lien manquant qui empêche le Modèle Standard d'être complet.

L'un des principaux buts de la physique des particules expérimentale est actuellement la recherche de ce boson de Higgs et de nouvelle physique. Pour cela, de nouveaux collisionneurs à très hautes énergies vont entrer en fonction. Il s'agit de collisionneurs hadroniques, qui sont de véritables usines à quarks et à gluons. Le secteur du Modèle Standard qui considère ces particules est la Chromodynamique Quantique, qui est maintenant établie comme la théorie des interactions fortes.

Pour pouvoir découvrir de nouvelles particules, il est nécessaire d'avoir des prédictions théoriques quantitatives précises de la physique connue, de manière à être capable d'extraire toute nouvelle physique. Cette thèse est consacrée aux calculs aux ordres supérieurs d'amplitudes de réactions hadroniques. Les techniques standards de calcul ne permettent pas d'atteindre la précision requise lorsqu'il s'agit de processus avec plusieurs particules dans l'état final. Cette tâche est aussi difficile dans le cas où les particules impliquées sont massives. Nous venons de voir que ce genre de calculs peut être réalisé à l'aide de la méthode amplitude d'hélicité et d'un formalisme adapté pour la réduction des intégrales, qui constitue une partie compliquée du calcul. La méthode amplitude d'hélicité diffère des techniques standards et consiste à calculer séparément l'amplitude de chaque configuration d'hélicités en exploitant les propriétés de jauge, ce qui permet d'avoir une représentation explicite des vecteurs de polarisation. En pratique, cette méthode fonctionne bien. Cependant, à l'ordre NLO apparaît dans les calculs une difficulté majeure : les intégrales de boucle. Le calcul



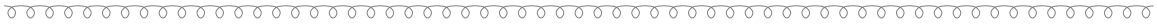
de ces intégrales est hautement non-trivial, et il a fallu développer de nouvelles techniques. Nous avons donc mis en place un formalisme de réduction des intégrales scalaires et tensorielles qui consiste à séparer la partie divergente de la partie finie des intégrales. Nous avons vu qu'il est ainsi possible de réduire le nombre de pattes et le rang des intégrales. Ces techniques ont été implémentées dans un code analytique basé sur des langages de manipulations symboliques (FORM et MAPLE). A l'aide de ce code, j'ai effectué le calcul dans l'approximation NLO de la production associée de deux photons et d'un jet, c'est-à-dire un processus à cinq corps. Cette réaction est en particulier intéressante pour les expérimentateurs d'ATLAS et CMS, en tant que bruit de fond à la recherche du Higgs. De plus, elle est utile pour décrire correctement le comportement de la distribution transverse du boson de Higgs à impulsion élevée. En effet, ce genre de réactions n'est pas décrit correctement par les générateurs utilisés habituellement par les expérimentateurs, tels que HERWIG ou PYTHIA, et des calculs à l'ordre NLO sont requis pour obtenir des prédictions précises.

Un aspect compliqué de ce genre de calculs est contenu dans le nombre élevé de termes générés. Il est donc important de trouver des méthodes pour rendre le résultat compact (ce qui est crucial pour les codes numériques qui doivent rester relativement rapides). De plus, il faut prendre garde à éliminer les divergences factices, sources d'instabilités numériques.

Ainsi, j'ai présenté des résultats compacts du calcul des amplitudes des différentes configurations d'hélicités de  $gg \rightarrow \gamma\gamma g$ , sous une forme faisant apparaître clairement l'invariance de jauge et les symétries. J'ai alors écrit un code analytique et un code numérique pour calculer les carrés de ces amplitudes dans le but de trouver la section efficace. Le code numérique a pu être intégré à DIPHOX. Même si les résultats sont compacts, ils ont une structure bien plus compliquée que les autres amplitudes codées dans DIPHOX, et il a fallu ajouter à ce code une librairie multiprécision pour rendre compte correctement du comportement de la section efficace aux limites colinéaires. Une remarque cependant concerne la rapidité du code numérique. En effet, l'utilisation de bibliothèques multiprécisions augmente le temps de calcul. Il peut donc être intéressant de développer dans le futur de nouvelles optimisations qui permettraient de limiter le recours aux nombres multiprécisions.

L'étape suivante consiste à appliquer ce formalisme à d'autres études. En particulier, il serait intéressant de remplacer les photons dans l'état final par des bosons-vecteurs ( $W$ ,  $Z$ ) qui sont, contrairement aux photons, massifs. Le formalisme est indépendant des masses, si bien que le même code peut être réutilisé. Cependant, le nombre de termes sera bien plus important que dans le cas sans masse.

Une autre possibilité intéressante sera de remplacer les gluons entrants par des quarks. Là encore, le même code pourra être utilisé, même si le calcul n'est pas exactement le même. Notre méthode nous permettra de calculer les contributions virtuelles, et de manière à obtenir la section efficace totale, il sera nécessaire de leur ajouter les contributions réelles, qui sont plus faciles à calculer et même déjà connues.



La question fondamentale de la nature de la matière et des particules, qui se pose depuis l'origine de l'humanité, est toujours d'actualité. La réponse d'aujourd'hui combine concepts philosophiques et efforts mathématiques au sein du Modèle Standard. Il ne me reste qu'à espérer que mon travail, petite goutte d'eau dans l'océan, aidera à mieux appréhender le monde qui nous entoure.



# Annexe A

## Formulaire

### A.1 Algèbre de Dirac

Soit une algèbre de Dirac à  $n$  dimensions. La métrique qui lui est associée est :

$$g_{\mu\nu} = (1, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{(n-1) \text{ fois}}) . \quad (\text{A.1})$$

On a donc, en notation d'Einstein :

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = g_{\mu}^{\mu} = \delta_{\mu}^{\mu} = n . \quad (\text{A.2})$$

Les matrices  $\gamma$  de Dirac ont, comme règle d'anticommutation :

$$\{\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}\} = 2g_{\mu\nu} , \quad (\text{A.3})$$

d'où l'on tire

$$\gamma^{\mu} \gamma_{\mu} = n . \quad (\text{A.4})$$

On peut en déduire :

$$\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \gamma^{\mu} = (2 - n) \gamma_{\nu} \quad (\text{A.5})$$

$$\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \gamma_{\rho} \gamma^{\mu} = 4g_{\nu\rho} - (4 - n) \gamma_{\nu} \gamma_{\rho} \quad (\text{A.6})$$

$$\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \gamma_{\rho} \gamma_{\sigma} \gamma^{\mu} = -2\gamma_{\sigma} \gamma_{\rho} \gamma_{\nu} + (4 - n) \gamma_{\nu} \gamma_{\rho} \gamma_{\sigma} \quad (\text{A.7})$$

$$\gamma_{\mu} \gamma_{\nu} \gamma_{\rho} \gamma_{\sigma} \gamma_{\theta} \gamma^{\mu} = 2\gamma_{\theta} \gamma_{\nu} \gamma_{\rho} \gamma_{\sigma} + 2\gamma_{\sigma} \gamma_{\rho} \gamma_{\nu} \gamma_{\theta} + (N - 4) \gamma_{\nu} \gamma_{\rho} \gamma_{\sigma} \gamma_{\theta} . \quad (\text{A.8})$$

Dans le cas où  $n = 4$ , les matrices de Dirac apparaissent comme une généralisation des matrices de Pauli :

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} , \quad (\text{A.9})$$

et

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad (\text{A.10})$$

où les  $\sigma$  sont les matrices de Pauli habituelles :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (\text{A.11})$$

On définit alors la matrice  $\gamma_5$  par :

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 . \quad (\text{A.12})$$

On peut vérifier que :

$$(\gamma_5)^2 = 1 , \quad (\text{A.13})$$

et que

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0 . \quad (\text{A.14})$$

Les formules de traces les plus utiles sont :

$$\text{Tr}[\gamma_\mu\gamma_\nu] = 4g_{\mu\nu} , \quad (\text{A.15})$$

$$\text{Tr}[\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma] = 4(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}) . \quad (\text{A.16})$$

De plus, la trace d'un produit d'un nombre impair de matrices  $\gamma$  est nulle.

## A.2 Facteurs de couleur

On considère le groupe  $SU(N_c)$ , où  $N_c$  est le nombre de couleurs. Il existe  $N_c^2 - 1$  générateurs dans ce groupe, notés  $T^a$ , avec  $a = 1 \cdots N_c^2 - 1$ .

Les relations suivantes sont utiles lors du calcul de diagrammes :

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c , \quad f^{abc} \text{ totalement antisymétrique} \quad (\text{A.17})$$

$$\{T^a, T^b\} = \frac{1}{N_c} \delta_{ab} I + d^{abc} T^c , \quad d^{abc} \text{ totalement symétrique} \quad (\text{A.18})$$

$$T^a T^b = \frac{1}{2} \left[ \frac{\delta_{ab}}{N_c} I + (d^{abc} + i f^{abc}) T^c \right] , \quad (\text{A.19})$$

$$T_{ij}^a T_{kl}^a = \frac{1}{2} (\delta_{il} \delta_{ij} - \frac{1}{4N_c} \delta_{ij} \delta_{kl}) , \quad (\text{A.20})$$

avec

$$f^{abb} = 0 \quad , \quad (\text{A.21})$$

$$d^{abb} = 0 \quad , \quad (\text{A.22})$$

$$f^{acd} f^{bcd} = N_c \delta_{ab} \quad , \quad (\text{A.23})$$

$$f^{acd} d^{bcd} = 0 \quad , \quad (\text{A.24})$$

$$d^{acd} d^{bcd} = \frac{N_c^2 - 4}{N_c} \delta_{ab} \quad . \quad (\text{A.25})$$

Les traces ont les propriétés suivantes :

$$\text{Tr}[T^a] = 0 \quad , \quad (\text{A.26})$$

$$\text{Tr}[T^a, T^b] = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad , \quad (\text{A.27})$$

$$\text{Tr}[T^a, T^b, T^c] = \frac{1}{4} (d^{abc} + i f^{abc}) \quad , \quad (\text{A.28})$$

$$\text{Tr}[T^a, T^b, T^c, T^d] = \frac{1}{4N_c} \delta_{ab} \delta_{cd} + \frac{1}{8} (d^{abe} + i f^{abe}) (d^{cde} + i f^{cde}) \quad , \quad (\text{A.29})$$

$$\text{Tr}[T^a, T^b, T^a, T^d] = -\frac{1}{4N_c} \delta_{bd} \quad . \quad (\text{A.30})$$

### A.3 Fonctions $\Gamma$ et $B$

La fonction  $\Gamma$  d'Euler admet la représentation intégrale suivante :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty dt t^{x-1} \exp(-t) \quad \text{pour } x \text{ réel positif} \quad . \quad (\text{A.31})$$

On peut montrer que :

$$\Gamma(x+1) = x \Gamma(x) \quad . \quad (\text{A.32})$$

Pour un entier positif,  $\Gamma$  se confond avec la factorielle :

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad . \quad (\text{A.33})$$

La fonction d'Euler a les propriétés utiles suivantes :

$$\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \quad , \quad (\text{A.34})$$

$$\Gamma(2x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{(2x-1/2)} \Gamma(x) \Gamma(x + \frac{1}{2}) \quad , \quad (\text{A.35})$$

$$\Gamma(1+\epsilon) \stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{\simeq} 1 - \gamma \epsilon + \left( \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6} \right) \frac{\epsilon^2}{2} + o(\epsilon^2) \quad , \quad (\text{A.36})$$

où  $\gamma$  est la constante d'Euler :

$$\gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) \approx 0.5772 \quad . \quad (\text{A.37})$$

La fonction  $B$  a pour représentation intégrale :

$$B(x, y) = \int_0^1 dt t^{x-1} (1-t)^{y-1} \quad \text{pour } x \text{ et } y \text{ réels positifs .} \quad (\text{A.38})$$

Elle est reliée à la fonction  $\Gamma$  par :

$$B(x, y) = \int_0^\infty dt \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} . \quad (\text{A.39})$$

## A.4 Fonction $Li_2$

La fonction dilogarithme  $Li_2$  est définie par :

$$Li_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} , \quad (\text{A.40})$$

pour les nombres complexes tels que  $|z| \leq 1$ . Pour  $|z| > 1$ , la fonction  $Li_2$  est définie par prolongement analytique de la série :

$$Li_2(z) = - \int_0^z \frac{\ln(1-t)}{t} dt , \quad (\text{A.41})$$

pour un  $z$  tel que  $|\arg(1-z)| < \pi$ .

Elle a les propriétés suivantes :

$$Li_2(z) + Li_2\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{2} \ln^2(z) + \frac{\pi^2}{3} + i\pi \ln(z) \quad \text{pour } |\arg(-z)| < \pi , \quad (\text{A.42})$$

$$Li_2(z) + Li_2(1-z) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(z) \ln(1-z) \quad \text{pour } |\arg(z)|, |\arg(1-z)| < \pi \quad (\text{A.43})$$

$$Li_2(1) = \frac{\pi^2}{6} , \quad (\text{A.44})$$

$$Li_2(-1) = -\frac{\pi^2}{12} , \quad (\text{A.45})$$

$$Li_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} \ln^2(2) . \quad (\text{A.46})$$

On considère maintenant le cas où  $z = x + i\lambda s$ , avec  $s = \pm 1$  et  $\lambda$  est un nombre infinitésimal. On a alors :

$$Li_2(z) + Li_2\left(\frac{1}{z}\right) = \begin{cases} \text{pour } x < 0 & -\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \ln^2(-x) \\ \text{pour } x > 0 & \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} \ln^2(x) + i\pi s \ln(x) \end{cases} \quad (\text{A.47})$$

## Annexe B

# Eléments techniques

### B.1 Paramétrage de Feynman

Lors du calcul d'intégrales, on utilise le paramétrage de Feynman afin de linéariser les dénominateurs. Pour cela, on peut se référer aux formules suivantes :

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{(ax + b(1-x))^2} , \quad (\text{B.1})$$

que l'on peut généraliser en :

$$\frac{1}{a^p b^q} = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^1 dx \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(ax + b(1-x))^{p+q}} . \quad (\text{B.2})$$

On peut aussi montrer que :

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dy y \int_0^1 dx \frac{1}{(axy + by(1-x) + c(1-y))^3} , \quad (\text{B.3})$$

et par récurrence, on la généralise à :

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^N q_i^2} = \Gamma(N) \int_0^1 \prod_{i=1}^N dx_i \frac{\delta(1 - \sum_{j=1}^N x_j)}{(\sum_{k=1}^N x_k q_k^2)^N} . \quad (\text{B.4})$$



## B.2 Calcul de $\tilde{I}_{r,m}$

Calcul de :

$$\tilde{I}_{r,m} = \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{(\tilde{l}^2)^r}{(\tilde{l}^2 - R^2)^m} , \quad (\text{B.5})$$

où  $\tilde{l}$  est la partie en  $n - 4$  dimensions du vecteur quelconque  $l$ . On a :

$$l^2 = \tilde{l}^2 + \hat{l}^2 . \quad (\text{B.6})$$

Donc :

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{r,m} &= \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{(\tilde{l}^2)^r}{(\tilde{l}^2 + \hat{l}^2 - R^2)^m} \\ &= \int \frac{d^4 \hat{l}}{(2\pi)^4} \int \frac{d^{(n-4)} \tilde{l}}{(2\pi)^{(n-4)}} \frac{(\tilde{l}^2)^r}{(\tilde{l}^2 - R'^2)^m} , \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

que l'on peut écrire sous la forme suivante dans l'espace euclidien :

$$\tilde{I}_{r,m} = i \int \frac{d^4 \hat{l}_E}{(2\pi)^4} \int \frac{d^{(n-4)} \tilde{l}_E}{(2\pi)^{(n-4)}} \frac{(-\tilde{l}_E^2)^r}{(-\tilde{l}_E^2 - \hat{l}_E^2 - R^2)^m} . \quad (\text{B.8})$$

On prend  $R'^2 = \hat{l}_E^2 + R^2$ , d'où :

$$\tilde{I}_{r,m} = i(-1)^{(r-m)} \int \frac{d^4 \hat{l}_E}{(2\pi)^4} \int \frac{d^{(n-4)} \tilde{l}_E}{(2\pi)^{(n-4)}} \frac{(\tilde{l}_E^2)^r}{(\tilde{l}_E^2 + R'^2)^m} . \quad (\text{B.9})$$

On commence par calculer :

$$I_1 = \int \frac{d^{(n-4)} \tilde{l}_E}{(2\pi)^{(n-4)}} \frac{(\tilde{l}_E^2)^r}{(\tilde{l}_E^2 + R'^2)^m} . \quad (\text{B.10})$$

En coordonnées sphériques :

$$\int d^n l_E \equiv \int |l_E|^{(n-1)} d|l_E| d\Omega_n . \quad (\text{B.11})$$

On a donc :

$$I_1 = \int \frac{d|\tilde{l}_E| |\tilde{l}_E|^{(n-5)}}{(2\pi)^{(n-4)}} d\Omega_{(n-4)} \frac{(|\tilde{l}_E|^2)^r}{(|\tilde{l}_E|^2 + R'^2)^m} . \quad (\text{B.12})$$

On sait que :

$$\int d\Omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} . \quad (\text{B.13})$$

D'où :

$$I_1 = \frac{2\pi^{(n/2-2)}}{\Gamma(n/2-2)} \frac{1}{(2\pi)^{(n-4)}} \int_0^\infty d|\tilde{l}_E| \frac{|\tilde{l}_E|^{(n+2r-5)}}{(|\tilde{l}_E|^2 + R'^2)^m} . \quad (\text{B.14})$$

On utilise la formule suivante :

$$\int_0^\infty dx \frac{x^p}{(x^n + z^n)^q} = \frac{1}{n} z^{(p+1-nq)} \frac{\Gamma(\frac{p+1}{n}) \Gamma(q - \frac{p+1}{n})}{\Gamma(q)} , \quad (\text{B.15})$$

pour en déduire :

$$I_1 = \frac{1}{4^{(n/2-2)}} \frac{1}{\pi^{(n/2-2)}} (R'^2)^{(n/2+r-2-m)} \frac{\Gamma(n/2 + r - 2) \Gamma(m - n/2 - r + 2)}{\Gamma(n/2 - 2) \Gamma(m)} . \quad (\text{B.16})$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} I &= i(-1)^{(r-m)} \int \frac{d^4 \hat{l}_E}{(2\pi)^4} I_1 \\ &= \frac{i(-1)^{(r-m)}}{(4\pi)^{(n/2-2)}} \frac{\Gamma(n/2 + r - 2) \Gamma(m - n/2 - r + 2)}{\Gamma(n/2 - 2) \Gamma(m)} \int \frac{d^4 \hat{l}_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\hat{l}_E^2 + R^2)^{(-n/2-r+2+m)}} . \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

On pose :

$$I_2 = \int \frac{d^4 \hat{l}_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\hat{l}_E^2 + R^2)^{(-n/2-r+2+m)}} \quad (\text{B.18})$$

$$= \int \frac{d|\hat{l}_E|}{(2\pi)^4} \frac{|\hat{l}_E|^3}{d\Omega_4} \frac{1}{(|\hat{l}_E|^2 + R^2)^{(m+2-r-n/2)}} \quad (\text{B.19})$$

$$= \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^\infty \frac{|\hat{l}_E|^3 d|\hat{l}_E|}{(|\hat{l}_E|^2 + R^2)^{(m+2-r-n/2)}} \quad (\text{B.20})$$

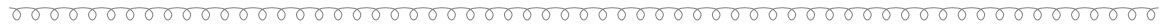
$$\begin{aligned} &= 2 \frac{1}{2^4 \pi^2} \frac{1}{2} (R)^{(3+1-2m-4+2r+n)} \frac{\Gamma(\frac{3+1}{2}) \Gamma(m+2-r-n/2-2)}{\Gamma(m+2-r-n/2)} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} (R^2)^{(n/2+r-m)} \frac{\Gamma(m-n/2-r)}{\Gamma(m+2-r-n/2)} . \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

En remplaçant  $I_2$  dans l'équation (B.17), on obtient :

$$\int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{(\tilde{l}^2)^r}{(l^2 - R^2)^m} =$$

$$\frac{i(-1)^{(r-m)}}{(4\pi)^{n/2}} (R^2)^{(n/2+r-m)} \frac{\Gamma(n/2 + r - 2) \Gamma(m - r - n/2)}{\Gamma(m) \Gamma(n/2 - 2)}$$

(B.22)



## Annexe C

# Intégrales à 3 points

Dans cet annexe sont donnés les résultats des calculs des intégrales scalaires et tensorielles de rangs 1, 2 et 3 à 3 points. On définit :

$$J_3^n(z_{i_1}, \dots, z_{i_3}; \mathcal{A}_S) = -\Gamma(3 - n/2) \int_0^1 \prod_{k=1}^3 dz_k \delta(1 - \sum_{j=1}^3 z_j) z_{i_1} \cdots z_{i_3} (R^2 - i\lambda)^{n/2-3} , \quad (\text{C.1})$$

et

$$J_3^{n+2}(z_{i_1}, \dots, z_{i_3}; \mathcal{A}_S) = -\Gamma(3 - (n+2)/2) \int_0^1 \prod_{k=1}^3 dz_k \delta(1 - \sum_{j=1}^3 z_j) z_{i_1} \cdots z_{i_3} (R^2 - i\lambda)^{(n+2)/2-3} . \quad (\text{C.2})$$

Les intégrales scalaires et tensorielles de rangs 1, 2 et 3 à 3 points s'écrivent, après paramétrage de Feynman :

$$\int \frac{d^n k}{i\pi^{n/2}} \frac{1}{q_{m_1}^2 q_{m_2}^2 q_{m_3}^2} = J_3^n(\mathcal{A}_S) , \quad (\text{C.3})$$

$$\int \frac{d^n k}{i\pi^{n/2}} \frac{q_a^\mu}{q_{m_1}^2 q_{m_2}^2 q_{m_3}^2} = \sum_{j \in S} \Delta_{a,j}^\mu J_3^n(z_{p(j,S)}; \mathcal{A}_S) , \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^n k}{i\pi^{n/2}} \frac{q_{a_1}^{\mu_1} q_{a_2}^{\mu_2}}{q_{m_1}^2 q_{m_2}^2 q_{m_3}^2} &= -\frac{1}{2} g^{\mu_1 \mu_2} J_3^{n+2}(\mathcal{A}_S) \\ &+ \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} \Delta_{a_1 i}^{\mu_1} \Delta_{a_2 j}^{\mu_2} J_3^n(z_{p(i,S)}, z_{p(j,S)}; \mathcal{A}_S) , \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^n k}{i\pi^{n/2}} \frac{q_{a_1}^{\mu_1} q_{a_2}^{\mu_2} q_{a_3}^{\mu_3}}{q_{m_1}^2 q_{m_2}^2 q_{m_3}^2} = & -\frac{1}{2} g^{\mu_2 \mu_3} \sum_{i \in S} \Delta_{a_1 i}^{\mu_1} J_3^{n+2}(z_{p(i,S)}; \mathcal{A}_S) \\
& -\frac{1}{2} g^{\mu_1 \mu_3} \sum_{j \in S} \Delta_{a_2 j}^{\mu_2} J_3^{n+2}(z_{p(j,S)}; \mathcal{A}_S) \\
& -\frac{1}{2} g^{\mu_1 \mu_2} \sum_{k \in S} \Delta_{a_3 k}^{\mu_3} J_3^{n+2}(z_{p(k,S)}; \mathcal{A}_S) \\
& + \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} \sum_{k \in S} \Delta_{a_1 i}^{\mu_1} \Delta_{a_2 j}^{\mu_2} \Delta_{a_3 k}^{\mu_3} J_3^n(z_{p(i,S)}, z_{p(j,S)}, z_{p(k,S)}; \mathcal{A}_S) .
\end{aligned} \tag{C.6}$$

La liste  $S$  (correspondant à l'ensemble des labels des propagateurs internes) est dans notre cas  $\{m_1, m_2, m_3\}$ .  $R^2$  est alors défini comme :

$$R^2 = z_1 z_2 \mathcal{S}^{[S]}_{m_1 m_2} + z_2 z_3 \mathcal{S}^{[S]}_{m_2 m_3} + z_1 z_3 \mathcal{S}^{[S]}_{m_1 m_3} , \tag{C.7}$$

et l'argument des intégrales  $J$  est alors :

$$\mathcal{A}_S : p_1^2, p_2^2, p_3^2 , \tag{C.8}$$

avec, conformément à la figure (C.1) :

$$\begin{aligned}
p_1 &= q_{m_2} - q_{m_1} , \\
p_2 &= q_{m_3} - q_{m_2} , \\
p_3 &= q_{m_1} - q_{m_3} ,
\end{aligned} \tag{C.9}$$

où  $(q_{m_i} - q_{m_j})^2 = \mathcal{S}^{[S]}_{m_i m_j}$ . Par conséquent, on a :

$$\mathcal{A}_S : \mathcal{S}^{[S]}_{m_1 m_2}, \mathcal{S}^{[S]}_{m_2 m_3}, \mathcal{S}^{[S]}_{m_1 m_3} . \tag{C.10}$$

On considère ici des diagrammes comportant une ou deux pattes massives. Dans le cas avec une seule patte massive, on choisit le label des propagateurs internes de manière à ce que la masse se retrouve à la dernière position de l'argument ( $\mathcal{S}^{[S]}_{m_1 m_3}$ ). On appelle cette masse  $M_3$ . De même, pour une fonction à 3 points avec deux masses, on choisit les labels de sorte que les deux masses, appelées  $M_2$  et  $M_3$ , se retrouvent aux positions  $\mathcal{S}^{[S]}_{m_2 m_3}$  et  $\mathcal{S}^{[S]}_{m_1 m_3}$ .

Pour avoir des notations compactes, on définit les fonctions suivantes :

$$H_0(A, \alpha) = \frac{\bar{A}^\alpha}{A} , \tag{C.11}$$

$$H_1(A, B, \alpha) = \frac{\bar{A}^\alpha - \bar{B}^\alpha}{A - B} , \tag{C.12}$$

$$H_2(A, B, \alpha) = \frac{\bar{A}^\alpha}{A - B} + \frac{1}{\alpha + 1} \frac{\bar{A}^{\alpha+1} - \bar{B}^{\alpha+1}}{(A - B)^2} , \tag{C.13}$$

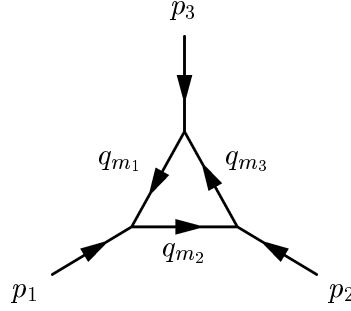


FIG. C.1 – Diagramme à 3 points.

$$H_3(A, B, \alpha) = \frac{\bar{A}^\alpha}{A - B} + \frac{2}{\alpha + 1} \frac{\bar{A}^{\alpha+1}}{(A - B)^2} + \frac{2}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)} \frac{\bar{A}^{\alpha+2} - \bar{B}^{\alpha+2}}{(A - B)^3} , \quad (\text{C.14})$$

$$H_4(A, B, \alpha) = \frac{\bar{A}^\alpha}{A - B} + \frac{3}{\alpha + 1} \frac{\bar{A}^{\alpha+1}}{(A - B)^2} + \frac{6}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)} \frac{\bar{A}^{\alpha+2}}{(A - B)^3} + \frac{6}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)} \frac{\bar{A}^{\alpha+3} - \bar{B}^{\alpha+3}}{(A - B)^4} , \quad (\text{C.15})$$

où l'on a introduit la notation  $\bar{A} = -A - i\lambda$ . Ces fonctions ont les propriétés de symétrie suivantes :

$$H_1(A, B, \alpha) = H_1(B, A, \alpha) , \quad (\text{C.16})$$

$$H_2(A, B, \alpha) = -H_2(B, A, \alpha) + H_1(B, A, \alpha) , \quad (\text{C.17})$$

$$H_3(A, B, \alpha) = H_3(B, A, \alpha) - 2H_2(B, A, \alpha) + H_1(B, A, \alpha) , \quad (\text{C.18})$$

$$H_4(A, B, \alpha) = -H_4(B, A, \alpha) + 3H_3(B, A, \alpha) - 3H_2(B, A, \alpha) + H_1(B, A, \alpha) . \quad (\text{C.19})$$

Toutes ces fonctions ont un comportement régulier quand  $A = B$ . Dans tous les calculs analytiques, avant d'introduire l'expression explicite de ces fonctions, on essaie, pour éviter les divergences factices, de factoriser  $(A - B)$ . Si cette factorisation est possible, on peut les

réduire en utilisant les formules suivantes :

$$(A - B) H_1(A, B, \alpha) = \bar{A}^\alpha - \bar{B}^\alpha , \quad (\text{C.20})$$

$$(A - B) H_2(A, B, \alpha) = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \bar{A}^\alpha - \frac{1}{1 + \alpha} B H_1(A, B, \alpha) , \quad (\text{C.21})$$

$$(A - B) H_3(A, B, \alpha) = \frac{\alpha}{2 + \alpha} \bar{A}^\alpha - \frac{2}{2 + \alpha} B H_2(A, B, \alpha) , \quad (\text{C.22})$$

$$(A - B) H_4(A, B, \alpha) = \frac{\alpha}{3 + \alpha} \bar{A}^\alpha - \frac{3}{3 + \alpha} B H_3(A, B, \alpha) . \quad (\text{C.23})$$

On peut aussi montrer que :

$$H_1(A, B, \alpha + 1) = -\bar{A}^\alpha - B H_1(A, B, \alpha) , \quad (\text{C.24})$$

$$H_2(A, B, \alpha + 1) = \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2} (-\bar{A}^\alpha - B H_2(A, B, \alpha)) , \quad (\text{C.25})$$

$$H_3(A, B, \alpha + 1) = \frac{\alpha + 1}{\alpha + 3} (-\bar{A}^\alpha - B H_3(A, B, \alpha)) , \quad (\text{C.26})$$

$$H_4(A, B, \alpha + 1) = \frac{\alpha + 1}{\alpha + 4} (-\bar{A}^\alpha - B H_4(A, B, \alpha)) . \quad (\text{C.27})$$

Avant de donner le résultat des intégrales à 3 points, on définit aussi la quantité  $\Gamma_{\varepsilon_{ir}}$  :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\varepsilon_{ir}} &= \frac{\Gamma(1 - \varepsilon_{ir}) \Gamma^2(1 + \varepsilon_{ir})}{\Gamma(1 + 2 \varepsilon_{ir})} \\ &= 1 + \gamma \varepsilon_{ir} + \left( \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\pi^2}{12} \right) \varepsilon_{ir}^2 . \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

A partir de ces définitions, on présente maintenant le résultat du calcul des intégrales à 3 points :

- pour les intégrales sans paramètre de Feynman, on obtient :

$$J_3^n(0, 0, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}^2} H_0(M_3, \varepsilon_{ir}) , \quad (\text{C.29})$$

$$J_3^n(0, M_2, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}^2} H_1(M_3, M_2, \varepsilon_{ir}) , \quad (\text{C.30})$$

- pour les intégrales avec un paramètre de Feynman :

$$J_3^n(z_1; 0, 0, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}} (1 - 2\varepsilon_{ir}) H_0(M_3, \varepsilon_{ir}) , \quad (\text{C.31})$$

$$J_3^n(z_2; 0, 0, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}^2} (1 - 2\varepsilon_{ir} + 4\varepsilon_{ir}^2) H_0(M_3, \varepsilon_{ir}) , \quad (\text{C.32})$$

$$J_3^n(z_3; 0, 0, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}} (1 - 2\varepsilon_{ir}) H_0(M_3, \varepsilon_{ir}) , \quad (\text{C.33})$$

$$J_3^n(z_1; 0, M_2, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}^2} (1 - \varepsilon_{ir} + 2\varepsilon_{ir}^2) H_2(M_3, M_2, \varepsilon_{ir}) , \quad (\text{C.34})$$

$$J_3^n(z_2; 0, M_2, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}^2} (1 - \varepsilon_{ir} + 2\varepsilon_{ir}^2) H_2(M_2, M_3, \varepsilon_{ir}) , \quad (\text{C.35})$$

$$J_3^n(z_3; 0, M_2, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}} (1 - 2\varepsilon_{ir}) H_1(M_3, M_2, \varepsilon_{ir}) , \quad (\text{C.36})$$

- pour les intégrales avec deux paramètres de Feynman :

$$J_3^n(z_1, z_1; 0, 0, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}} \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_{ir}\right) H_0(M_3, \varepsilon_{ir}) , \quad (\text{C.37})$$

$$J_3^n(z_2, z_2; 0, 0, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}^2} (1 - 3\varepsilon_{ir} + 7\varepsilon_{ir}^2) H_0(M_3, \varepsilon_{ir}) , \quad (\text{C.38})$$

$$J_3^n(z_3, z_3; 0, 0, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}} \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_{ir}\right) H_0(M_3, \varepsilon_{ir}) , \quad (\text{C.39})$$

$$J_3^n(z_1, z_2; 0, 0, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon_{ir}\right) H_0(M_3, \varepsilon_{ir}) , \quad (\text{C.40})$$

$$J_3^n(z_1, z_3; 0, 0, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{2} H_0(M_3, \varepsilon_{ir}) , \quad (\text{C.41})$$

$$J_3^n(z_2, z_3; 0, 0, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\varepsilon_{ir}\right) H_0(M_3, \varepsilon_{ir}) , \quad (\text{C.42})$$

$$J_3^n(z_1, z_1; 0, M_2, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}^2} \left(1 - \frac{3}{2}\varepsilon_{ir} + 3\varepsilon_{ir}^2\right) H_3(M_3, M_2, \varepsilon_{ir}) , \quad (\text{C.43})$$

$$J_3^n(z_2, z_2; 0, M_2, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}^2} \left(1 - \frac{3}{2}\varepsilon_{ir} + 3\varepsilon_{ir}^2\right) H_3(M_2, M_3, \varepsilon_{ir}) , \quad (\text{C.44})$$

$$J_3^n(z_3, z_3; 0, M_2, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}} \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_{ir}\right) H_1(M_3, M_2, \varepsilon_{ir}) , \quad (\text{C.45})$$

$$J_3^n(z_1, z_2; 0, M_2, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}^2} \left(1 - \frac{3}{2}\varepsilon_{ir} + 3\varepsilon_{ir}^2\right) \times (H_2(M_3, M_2, \varepsilon_{ir}) - H_3(M_3, M_2, \varepsilon_{ir})) , \quad (\text{C.46})$$

$$J_3^n(z_1, z_3; 0, M_2, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}} \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_{ir}\right) H_2(M_3, M_2, \varepsilon_{ir}) , \quad (\text{C.47})$$

$$J_3^n(z_2, z_3; 0, M_2, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}} \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_{ir}\right) H_2(M_2, M_3, \varepsilon_{ir}) , \quad (\text{C.48})$$



- pour les intégrales avec trois paramètres de Feynman :

$$J_3^n(z_1, z_1, z_1; 0, 0, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}} \left( \frac{1}{3} - \frac{13}{18} \varepsilon_{ir} \right) H_0(M_3, \varepsilon_{ir}) , \quad (C.49)$$

$$J_3^n(z_2, z_2, z_2; 0, 0, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}^2} \left( 1 - \frac{11}{3} \varepsilon_{ir} + \frac{85}{9} \varepsilon_{ir}^2 \right) H_0(M_3, \varepsilon_{ir}) , \quad (C.50)$$

$$J_3^n(z_3, z_3, z_3; 0, 0, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}} \left( \frac{1}{3} - \frac{13}{18} \varepsilon_{ir} \right) H_0(M_3, \varepsilon_{ir}) , \quad (C.51)$$

$$J_3^n(z_1, z_1, z_2; 0, 0, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}} \left( \frac{1}{6} - \frac{4}{9} \varepsilon_{ir} \right) H_0(M_3, \varepsilon_{ir}) , \quad (C.52)$$

$$J_3^n(z_1, z_2, z_2; 0, 0, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}} \left( \frac{1}{3} - \frac{11}{9} \varepsilon_{ir} \right) H_0(M_3, \varepsilon_{ir}) , \quad (C.53)$$

$$J_3^n(z_1, z_1, z_3; 0, 0, M_3) = \Gamma_{\varepsilon_{ir}} \frac{1}{6} H_0(M_3, \varepsilon_{ir}) , \quad (C.54)$$

$$J_3^n(z_2, z_2, z_3; 0, 0, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}} \left( \frac{1}{3} - \frac{11}{9} \varepsilon_{ir} \right) H_0(M_3, \varepsilon_{ir}) , \quad (C.55)$$

$$J_3^n(z_1, z_3, z_3; 0, 0, M_3) = \Gamma_{\varepsilon_{ir}} \frac{1}{6} H_0(M_3, \varepsilon_{ir}) , \quad (C.56)$$

$$J_3^n(z_2, z_3, z_3; 0, 0, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}} \left( \frac{1}{6} - \frac{4}{9} \varepsilon_{ir} \right) H_0(M_3, \varepsilon_{ir}) , \quad (C.57)$$

$$J_3^n(z_1, z_2, z_3; 0, 0, M_3) = \Gamma_{\varepsilon_{ir}} \frac{1}{6} H_0(M_3, \varepsilon_{ir}) , \quad (C.58)$$

$$J_3^n(z_1, z_1, z_1; 0, M_2, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}^2} \left( 1 - \frac{11}{6} \varepsilon_{ir} + \frac{67}{18} \varepsilon_{ir}^2 \right) H_4(M_3, M_2, \varepsilon_{ir}) , \quad (C.59)$$

$$J_3^n(z_2, z_2, z_2; 0, M_2, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}^2} \left( 1 - \frac{11}{6} \varepsilon_{ir} + \frac{67}{18} \varepsilon_{ir}^2 \right) H_4(M_2, M_3, \varepsilon_{ir}) , \quad (C.60)$$

$$J_3^n(z_3, z_3, z_3; 0, M_2, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}} \left( \frac{1}{3} - \frac{13}{18} \varepsilon_{ir} \right) H_1(M_3, M_2, \varepsilon_{ir}) , \quad (C.61)$$

$$J_3^n(z_1, z_1, z_2; 0, M_2, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}^2} \left( 1 - \frac{11}{6} \varepsilon_{ir} + \frac{67}{18} \varepsilon_{ir}^2 \right) \times (H_3(M_3, M_2, \varepsilon_{ir}) - H_4(M_3, M_2, \varepsilon_{ir})) , \quad (C.62)$$

$$J_3^n(z_1, z_2, z_2; 0, M_2, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}^2} \left( 1 - \frac{11}{6} \varepsilon_{ir} + \frac{67}{18} \varepsilon_{ir}^2 \right) \times (H_3(M_2, M_3, \varepsilon_{ir}) - H_4(M_2, M_3, \varepsilon_{ir})) , \quad (C.63)$$

$$J_3^n(z_1, z_1, z_3; 0, M_2, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}} \left( \frac{1}{3} - \frac{13}{18} \varepsilon_{ir} \right) H_3(M_3, M_2, \varepsilon_{ir}) , \quad (C.64)$$

$$J_3^n(z_2, z_2, z_3; 0, M_2, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}} \left( \frac{1}{3} - \frac{13}{18} \varepsilon_{ir} \right) H_3(M_2, M_3, \varepsilon_{ir}) , \quad (C.65)$$

$$J_3^n(z_1, z_3, z_3; 0, M_2, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}} \left( \frac{1}{6} - \frac{5}{18} \varepsilon_{ir} \right) H_2(M_3, M_2, \varepsilon_{ir}) , \quad (C.66)$$

$$J_3^n(z_2, z_3, z_3; 0, M_2, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}} \left( \frac{1}{6} - \frac{5}{18} \varepsilon_{ir} \right) H_2(M_2, M_3, \varepsilon_{ir}) , \quad (C.67)$$

$$J_3^n(z_1, z_2, z_3; 0, M_2, M_3) = \frac{\Gamma_{\varepsilon_{ir}}}{\varepsilon_{ir}} \left( \frac{1}{3} - \frac{13}{18} \varepsilon_{ir} \right) \times (H_2(M_3, M_2, \varepsilon_{ir}) - H_3(M_3, M_2, \varepsilon_{ir})) . \quad (C.68)$$

- Les intégrales à 6 dimensions sont issues de :

$$\int_0^1 \prod_{k=1}^3 dz_k \delta(1 - \sum_{j=1}^3 z_j) z_{i_1} \cdots z_{i_3} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{l^2}{(l^2 - R^2)^3} . \quad (\text{C.69})$$

On sépare la partie de  $l$  à 4 dimensions (notée  $\hat{l}$ ) de celle à  $n - 4$  dimensions ( $\tilde{l}$ ). On désigne l'intégrale associée à  $\hat{l}$  par  $\hat{J}$  et celle associée à  $\tilde{l}$  par  $\tilde{J}$ .

Ainsi, pour les intégrales à 6 dimensions sans paramètre de Feynman, on a :

$$J_3^{n+2}(0, 0, M_3) = H_0(M_3, 1 - \varepsilon_{\text{uv}}) , \quad (\text{C.70})$$

$$J_3^{n+2}(0, M_2, M_3) = H_1(M_3, M_2, 1 - \varepsilon_{\text{uv}}) , \quad (\text{C.71})$$

$$(\text{C.72})$$

- et enfin pour les intégrales à 6 dimensions avec un paramètre de Feynman :

$$J_3^{n+2}(z_1; 0, 0, M_3) = \frac{1}{3} H_0(M_3, 1 - \varepsilon_{\text{uv}}) , \quad (\text{C.73})$$

$$J_3^{n+2}(z_2; 0, 0, M_3) = \frac{1}{3} H_0(M_3, 1 - \varepsilon_{\text{uv}}) , \quad (\text{C.74})$$

$$J_3^{n+2}(z_3; 0, 0, M_3) = \frac{1}{3} H_0(M_3, 1 - \varepsilon_{\text{uv}}) , \quad (\text{C.75})$$

$$J_3^{n+2}(z_1; 0, M_2, M_3) = \frac{2}{3} H_2(M_3, M_2, 1 - \varepsilon_{\text{uv}}) , \quad (\text{C.76})$$

$$J_3^{n+2}(z_2; 0, M_2, M_3) = \frac{2}{3} H_2(M_2, M_3, 1 - \varepsilon_{\text{uv}}) , \quad (\text{C.77})$$

$$J_3^{n+2}(z_3; 0, M_2, M_3) = -\frac{1}{3} H_1(M_3, M_2, 1 - \varepsilon_{\text{uv}}) . \quad (\text{C.78})$$



## Annexe D

# Intégrales à 4 points

On souhaite calculer l'intégrale à 4 points de rang 4 :

$$I_4^{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{q_a^\mu q_b^\nu q_c^\rho q_d^\sigma}{\prod_{i=1}^4 q_i^2} . \quad (\text{D.1})$$

D'après le formalisme de réduction des intégrales (voir chapitre 3), on décompose l'intégrale sous la forme :

$$I_4^{\mu\nu\rho\sigma} = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{q_b^\nu q_c^\rho q_d^\sigma (q_a^\mu - \sum_{j=1}^4 \mathcal{C}_{ja}^\mu q_j^2)}{\prod_{i=1}^4 q_i^2} + \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{q_b^\nu q_c^\rho q_d^\sigma (\sum_{j=1}^4 \mathcal{C}_{ja}^\sigma q_j^2)}{\prod_{i=1}^4 q_i^2} , \quad (\text{D.2})$$

avec :

$$\mathcal{C}_{ja}^\mu = - \sum_{i=1}^4 \mathcal{S}_{ji}^{-1} \Delta_{ia}^\mu . \quad (\text{D.3})$$

L'intégrale de droite se réduit à une intégrale à 3 points (en simplifiant des  $q_j$  du numérateur avec des  $q_i$  du dénominateur). Soit  $I_1$  l'intégrale de gauche :

$$I_1 \equiv \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{q_b^\nu q_c^\rho q_d^\sigma (q_a^\mu - \sum_{j=1}^4 \mathcal{C}_{ja}^\mu q_j^2)}{\prod_{i=1}^4 q_i^2} . \quad (\text{D.4})$$

On effectue la transformation :

$$q_a^\mu - \sum_{j=1}^4 C_{ja}^\mu q_j^2 \longrightarrow l^\lambda \left( \mathcal{T}_{ae}^{\mu\lambda} + 2 \sum_{i=1}^4 z_i \Delta_{ei}^\lambda \mathcal{V}_a^\mu \right) + (l^2 + R^2) \mathcal{V}_a^\mu , \quad (\text{D.5})$$

où  $e$  est un indice arbitraire, avec :

$$\mathcal{T}_{ab}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + 2 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \mathcal{S}_{jk}^{-1} \Delta_{ja}^\mu \Delta_{kb}^\nu , \quad (\text{D.6})$$

$$\mathcal{V}_a^\mu = \sum_{k=1}^4 b_k \Delta_{ka}^\mu . \quad (\text{D.7})$$

Ainsi :

$$q_a^\mu - \sum_{j=1}^4 C_{ja}^\mu q_j^2 \longrightarrow l^\lambda \left( g^{\mu\lambda} + 2 \sum_{i=1}^4 z_i \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \mathcal{S}_{jk}^{-1} \Delta_{ka}^\mu \Delta_{ji}^\lambda \right) + (l^2 + R^2) \sum_{k=1}^4 b_k \Delta_{ka}^\mu . \quad (\text{D.8})$$

Après avoir réalisé cette transformation, en effectuant le paramétrage de Feynman (voir annexe B), on obtient :

$$\begin{aligned} I_1 = & \Gamma(4) \int_0^1 \prod_{i=1}^4 dz_i \delta(1 - \sum_{i=1}^4 z_i) \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2 - R^2)^4} \\ & \times \left[ q_b^\nu q_c^\rho q_d^\sigma \left( l^\lambda (g^{\mu\lambda} + 2 \sum_{i=1}^4 z_i \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \mathcal{S}_{jk}^{-1} \Delta_{ka}^\mu \Delta_{ji}^\lambda) + (l^2 + R^2) \sum_{k=1}^4 b_k \Delta_{ka}^\mu \right) \right] . \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Or  $q \longrightarrow l + \sum_{i=1}^4 z_i \Delta_{ji}$ , on a donc :

$$I_1 = \Gamma(4) \int_0^1 \prod_{i=1}^4 dz_i \delta(1 - \sum_{i=1}^4 z_i) \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2 - R^2)^4} \quad (D.10)$$

$$\times \left[ (l^\nu + \sum_{i=1}^4 z_i \Delta_{bi}^\nu) (l^\sigma + \sum_{j=1}^4 z_j \Delta_{dj}^\sigma) (l^\rho + \sum_{k=1}^4 z_k \Delta_{ck}^\rho) \right. \\ \left. \left( l^\lambda (g^{\mu\lambda} + 2 \sum_{i=1}^4 z_i \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \mathcal{S}_{jk}^{-1} \Delta_{ka}^\mu \Delta_{ji}^\lambda) + (l^2 + R^2) \sum_{k=1}^4 b_k \Delta_{ka}^\mu \right) \right]$$

$$= \Gamma(4) \int_0^1 \prod_{i=1}^4 dz_i \delta(1 - \sum_{i=1}^4 z_i) \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2 - R^2)^4} \quad (D.11)$$

$$\times \left[ l^\nu l^\rho l^\sigma l^\lambda (g^{\mu\lambda} + 2 \sum_{i=1}^4 z_i \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \mathcal{S}_{jk}^{-1} \Delta_{ka}^\mu \Delta_{ji}^\lambda) + l^\nu l^\sigma (l^2 + R^2) \sum_{k=1}^4 b_k \Delta_{ka}^\mu a \sum_{i=1}^4 z_i \Delta_{ci}^\rho \right. \\ + l^\nu l^\rho (l^2 + R^2) \sum_{k=1}^4 b_k \Delta_{ka}^\mu a \sum_{j=1}^4 z_j \Delta_{dj}^\sigma + l^\sigma l^\rho (l^2 + R^2) \sum_{k=1}^4 b_k \Delta_{ka}^\mu a \sum_{i=1}^4 z_i \Delta_{ci}^\rho \\ + l^\nu l^\lambda (g^{\mu\lambda} + 2 \sum_{i=1}^4 z_i \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \mathcal{S}_{jk}^{-1} \Delta_{ka}^\mu \Delta_{ji}^\lambda) \left( \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 z_j z_k \Delta_{dj}^\sigma \Delta_{ck}^\rho \right) \\ + l^\sigma l^\lambda (g^{\mu\lambda} + 2 \sum_{i=1}^4 z_i \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \mathcal{S}_{jk}^{-1} \Delta_{ka}^\mu \Delta_{ji}^\lambda) \left( \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 z_i z_k \Delta_{bj}^\nu \Delta_{ck}^\rho \right) \\ + l^\rho l^\lambda (g^{\mu\lambda} + 2 \sum_{i=1}^4 z_i \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \mathcal{S}_{jk}^{-1} \Delta_{ka}^\mu \Delta_{ji}^\lambda) \left( \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 z_i z_j \Delta_{bj}^\nu \Delta_{dk}^\sigma \right) \\ \left. + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 z_i z_j z_k \Delta_{bi}^\nu \Delta_{cj}^\rho \Delta_{dk}^\sigma \left( \sum_{k=1}^4 b_k \Delta_{ka}^\mu a \right) (l^2 + R^2) \right] .$$

On peut le réécrire sous la forme :

$$I_1 = \Gamma(4) \int_0^1 \prod_{i=1}^4 dz_i \delta(1 - \sum_{i=1}^4 z_i) \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2 - R^2)^4} \quad (D.12)$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ \frac{l^4}{n(n+2)} (g^{\nu\sigma} g^{\rho\lambda} + g^{\nu\rho} g^{\sigma\lambda} + g^{\nu\lambda} g^{\sigma\rho}) (g^{\mu\lambda} + 2 \sum_{i=1}^4 z_i \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \mathcal{S}_{jk}^{-1} \Delta_{ka}^\mu \Delta_{ji}^\lambda) \right. \\ & + (l^2 + R^2) \sum_{k=1}^4 b_k \Delta_{ka}^\mu \left( \frac{l^2}{n} g^{\nu\sigma} \sum_{i=1}^4 z_i \Delta_{ci}^\rho + \frac{l^2}{n} g^{\nu\rho} \sum_{j=1}^4 z_j \Delta_{dj}^\sigma + \frac{l^2}{n} g^{\sigma\rho} \sum_{i=1}^4 z_i \Delta_{bi}^\nu \right) \\ & + \frac{l^2}{n} g^{\nu\lambda} (g^{\mu\lambda} + 2 \sum_{i=1}^4 z_i \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \mathcal{S}_{jk}^{-1} \Delta_{ka}^\mu \Delta_{ji}^\lambda) \left( \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 z_j z_k \Delta_{dj}^\sigma \Delta_{ck}^\rho \right) \\ & + \frac{l^2}{n} g^{\sigma\lambda} (g^{\mu\lambda} + 2 \sum_{i=1}^4 z_i \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \mathcal{S}_{jk}^{-1} \Delta_{ka}^\mu \Delta_{ji}^\lambda) \left( \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 z_i z_k \Delta_{bj}^\nu \Delta_{ck}^\rho \right) \\ & + \frac{l^2}{n} g^{\rho\lambda} (g^{\mu\lambda} + 2 \sum_{i=1}^4 z_i \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \mathcal{S}_{jk}^{-1} \Delta_{ka}^\mu \Delta_{ji}^\lambda) \left( \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 z_i z_j \Delta_{bj}^\nu \Delta_{dk}^\sigma \right) \\ & \left. + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 z_i z_j z_k \Delta_{bi}^\nu \Delta_{cj}^\rho \Delta_{dk}^\sigma \left( \sum_{k=1}^4 b_k \Delta_{ka}^\mu \right) (l^2 + R^2) \right] \end{aligned}$$

$$= \Gamma(4) \int_0^1 \prod_{i=1}^4 dz_i \delta(1 - \sum_{i=1}^4 z_i) \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2 - R^2)^4} \quad (D.13)$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ \frac{l^4}{n(n+2)} (g^{\nu\sigma} g^{\rho\mu} + g^{\nu\rho} g^{\sigma\mu} + g^{\nu\mu} g^{\sigma\rho}) \right. \\ & + 2 (g^{\nu\sigma} g^{\rho\lambda} + g^{\nu\rho} g^{\sigma\lambda} + g^{\nu\lambda} g^{\sigma\rho}) \left( \sum_{i=1}^4 z_i \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \mathcal{S}_{jk}^{-1} \Delta_{ka}^\mu \Delta_{ji}^\lambda \right) \\ & + \frac{l^2}{n} g^{\nu\mu} + 2 (g^{\nu\lambda} \sum_{i=1}^4 z_i \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \mathcal{S}_{jk}^{-1} \Delta_{ka}^\mu \Delta_{ji}^\lambda) \left( \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 z_j z_k \Delta_{dj}^\sigma \Delta_{ck}^\rho \right) \\ & + \frac{l^2}{n} g^{\sigma\mu} + 2 (g^{\sigma\lambda} \sum_{i=1}^4 z_i \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \mathcal{S}_{jk}^{-1} \Delta_{ka}^\mu \Delta_{ji}^\lambda) \left( \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 z_i z_k \Delta_{bj}^\nu \Delta_{ck}^\rho \right) \\ & + \frac{l^2}{n} g^{\rho\mu} + 2 (g^{\rho\lambda} \sum_{i=1}^4 z_i \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \mathcal{S}_{jk}^{-1} \Delta_{ka}^\mu \Delta_{ji}^\lambda) \left( \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 z_i z_j \Delta_{bj}^\nu \Delta_{dk}^\sigma \right) \\ & + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 z_i z_j z_k \Delta_{bi}^\nu \Delta_{cj}^\rho \Delta_{dk}^\sigma \left( \sum_{k=1}^4 b_k \Delta_{ka}^\mu \right) (l^2 + R^2) \\ & \left. + \frac{l^2}{n} (l^2 + R^2) \sum_{k=1}^4 b_k \Delta_{ka}^\mu \left( g^{\nu\sigma} \sum_{i=1}^4 z_i \Delta_{ci}^\rho + g^{\nu\rho} \sum_{j=1}^4 z_j \Delta_{dj}^\sigma + g^{\sigma\rho} \sum_{i=1}^4 z_i \Delta_{bi}^\nu \right) \right] . \end{aligned}$$

En introduisant  $\alpha$ ,  $\alpha'$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  et  $\xi$ , on peut mettre cette dernière relation sous la forme :

$$I_1 = \Gamma(4) \int_0^1 \prod_{i=1}^4 dz_i \delta(1 - \sum_{i=1}^4 z_i) \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2 - R^2)^4} \times \left[ l^4(\alpha + \alpha') + l^2(\beta + \gamma + \delta + \xi) + l^2 R^2 \alpha' + R^2 \xi \right] . \quad (\text{D.14})$$

D'après la formule (2.42), on a :

$$\int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{l^4}{(l^2 - R^2)^4} = \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} (R^2 - i\lambda)^{(n/2-2)} \frac{\Gamma(2 + n/2)\Gamma(2 - n/2)}{\Gamma(n/2)\Gamma(4)} , \quad (\text{D.15})$$

$$\int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{l^2}{(l^2 - R^2)^4} = \frac{-i}{(4\pi)^{n/2}} (R^2 - i\lambda)^{(n/2-3)} \frac{\Gamma(1 + n/2)\Gamma(3 - n/2)}{\Gamma(n/2)\Gamma(4)} , \quad (\text{D.16})$$

et

$$\int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2 - R^2)^4} = \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} (R^2 - i\lambda)^{(n/2-4)} \frac{\Gamma(4 - n/2)}{\Gamma(4)} . \quad (\text{D.17})$$

D'où :

$$I_1 = \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \int_0^1 \prod_{i=1}^4 dz_i \delta(1 - \sum_{i=1}^4 z_i) \times \left\{ \frac{1}{\Gamma(n/2)} \left[ (\alpha + \alpha') \Gamma(2 + n/2)\Gamma(2 - n/2) - (\alpha')\Gamma(1 + n/2)\Gamma(3 - n/2) \right] (R^2 - i\lambda)^{(n/2-2)} + \left[ (\xi)\Gamma(4 - n/2) - (\beta + \delta + \gamma + \xi) \frac{\Gamma(1 + n/2)\Gamma(3 - n/2)}{\Gamma(n/2)} \right] (R^2 - i\lambda)^{(n/2-3)} \right\} . \quad (\text{D.18})$$



On a donc, en remplaçant les  $\alpha, \alpha', \beta, \gamma, \delta$  et  $\xi$  par leurs valeurs :

$$\begin{aligned}
I_1 = & \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \int_0^1 \prod_{i=1}^4 dz_i \delta(1 - \sum_{i=1}^4 z_i) (R^2 - i\lambda)^{(n/2-2)} \\
& \times \frac{1}{\Gamma(n/2)} \left\{ \Gamma(2 + n/2) \Gamma(2 - n/2) \left[ \frac{1}{n(n+2)} (g^{\nu\sigma} g^{\rho\mu} + g^{\nu\rho} g^{\sigma\mu} + g^{\nu\mu} g^{\sigma\rho}) \right. \right. \\
& + \frac{2}{n(n+2)} (g^{\nu\sigma} g^{\rho\lambda} + g^{\nu\rho} g^{\sigma\lambda} + g^{\nu\lambda} g^{\sigma\rho}) \left( \sum_{i=1}^4 z_i \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \mathcal{S}_{jk}^{-1} \Delta_{ka}^\mu \Delta_{ji}^\lambda \right) \\
& + \frac{1}{n} (g^{\nu\sigma} \sum_{k=1}^4 z_k \Delta_{ck}^\rho + g^{\nu\rho} \sum_{j=1}^4 z_j \Delta_{dj}^\sigma + g^{\sigma\rho} \sum_{i=1}^4 z_i \Delta_{bi}^\nu) \left( \sum_{l=1}^4 b_l \Delta_{la}^\mu \right) \Big] \\
& - \Gamma(1 + n/2) \Gamma(3 - n/2) \frac{1}{n} (g^{\nu\sigma} \sum_{k=1}^4 z_k \Delta_{ck}^\rho + g^{\nu\rho} \sum_{j=1}^4 z_j \Delta_{dj}^\sigma + g^{\sigma\rho} \sum_{i=1}^4 z_i \Delta_{bi}^\nu) \left( \sum_{l=1}^4 b_l \Delta_{la}^\mu \right) \Big\} \\
& + \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \int_0^1 \prod_{i=1}^4 dz_i \delta(1 - \sum_{i=1}^4 z_i) (R^2 - i\lambda)^{(n/2-3)} \\
& \times \left\{ \Gamma(4 - n/2) \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 z_i z_j z_k \Delta_{bi}^\nu \Delta_{cj}^\rho \Delta_{dk}^\sigma \left( \sum_{l=1}^4 b_l \Delta_{la}^\mu \right) \right. \\
& - \frac{\Gamma(1 + n/2) \Gamma(3 - n/2)}{n \Gamma(n/2)} \left[ (g^{\nu\mu} \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 z_j z_k \Delta_{dj}^\sigma \Delta_{ck}^\rho) \right. \\
& + (g^{\sigma\mu} \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 z_i z_k \Delta_{bi}^\nu \Delta_{ck}^\rho) + (g^{\rho\mu} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 z_i z_j \Delta_{bi}^\nu \Delta_{dj}^\sigma) \\
& + 2g^{\nu\lambda} \left( \sum_{i=1}^4 z_i \sum_{l=1}^4 \sum_{l'=1}^4 \mathcal{S}_{ll'}^{-1} \Delta_{la}^\mu \Delta_{li}^\lambda \right) \left( \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 z_j z_k \Delta_{dj}^\sigma \Delta_{ck}^\rho \right) \\
& + 2g^{\sigma\lambda} \left( \sum_{i=1}^4 z_i \sum_{l=1}^4 \sum_{l'=1}^4 \mathcal{S}_{ll'}^{-1} \Delta_{la}^\mu \Delta_{li}^\lambda \right) \left( \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 z_j z_k \Delta_{bj}^\nu \Delta_{ck}^\rho \right) \\
& + 2g^{\rho\lambda} \left( \sum_{i=1}^4 z_i \sum_{l=1}^4 \sum_{l'=1}^4 \mathcal{S}_{ll'}^{-1} \Delta_{la}^\mu \Delta_{li}^\lambda \right) \left( \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 z_j z_k \Delta_{bj}^\nu \Delta_{dk}^\sigma \right) \\
& \left. \left. + n \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 z_i z_j z_k \Delta_{bj}^\nu \Delta_{ck}^\rho \Delta_{dk}^\sigma \left( \sum_{l=1}^4 b_l \Delta_{la}^\mu \right) \right] \right\} .
\end{aligned}
\tag{D.19}$$

En introduisant les intégrales à 6 et 8 dimensions :

$$J_4^{n+2}(z_{i_1}, \dots, z_{i_3}; \mathcal{A}_S) = \Gamma(4 - (n+2)/2) \int_0^1 \prod_{k=1}^4 dz_k \delta(1 - \sum_{j=1}^4 z_j) z_{i_1} \cdots z_{i_3} (R^2 - i\lambda)^{((n+2)/2-4)} ,
\tag{D.20}$$

et

$$J_4^{n+4}(z_{i_1}, \dots, z_{i_3}; \mathcal{A}_S) = \Gamma(4 - (n+4)/2) \int_0^1 \prod_{k=1}^4 dz_k \delta(1 - \sum_{j=1}^4 z_j) z_{i_1} \cdots z_{i_3} (R^2 - i\lambda)^{((n+4)/2-3)} .
\tag{D.21}$$

On obtient :

$$I_1 = \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \left\{ \frac{\Gamma(2+n/2)}{\Gamma(n/2)} \left[ \frac{1}{n(n+2)} (g^{\nu\sigma} g^{\rho\mu} + g^{\nu\rho} g^{\sigma\mu} + g^{\nu\mu} g^{\sigma\rho}) J_4^{n+4}(\mathcal{A}_S) \right. \right. \quad (D.22)$$

$$+ \frac{2}{n(n+2)} (g^{\nu\sigma} g^{\rho\lambda} + g^{\nu\rho} g^{\sigma\lambda} + g^{\nu\lambda} g^{\sigma\rho}) \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \mathcal{S}_{jk}^{-1} \Delta_{ka}^\mu \Delta_{ji}^\lambda J_4^{n+4}(z_i; \mathcal{A}_S) \Big] \\ + \left( \frac{\Gamma(2+n/2)}{n\Gamma(n/2)} - \frac{\Gamma(1+n/2)(2-n/2)}{n\Gamma(n/2)} \right) \left( \sum_{l=1}^4 b_l \Delta_{la}^\mu \right) \\ \times (g^{\nu\sigma} \sum_{k=1}^4 J_4^{n+4}(z_k; \mathcal{A}_S) \Delta_{ck}^\rho + g^{\nu\rho} \sum_{j=1}^4 J_4^{n+4}(z_j; \mathcal{A}_S) \Delta_{dj}^\sigma + g^{\sigma\rho} \sum_{i=1}^4 J_4^{n+4}(z_i; \mathcal{A}_S) \Delta_{bi}^\nu) \\ + (3-n/2) \left( \sum_{l=1}^4 b_l \Delta_{la}^\mu \right) \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 J_4^{n+2}(z_i, z_j, z_k; \mathcal{A}_S) \Delta_{bi}^\nu \Delta_{cj}^\rho \Delta_{dk}^\sigma - \frac{\Gamma(1+n/2)}{n\Gamma(n/2)} \\ \times \left[ g^{\nu\mu} \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 J_4^{n+2}(z_j, z_k; \mathcal{A}_S) \Delta_{ck}^\rho \Delta_{dj}^\sigma + g^{\sigma\mu} \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 J_4^{n+2}(z_i, z_k; \mathcal{A}_S) \Delta_{bi}^\nu \Delta_{ck}^\rho \right. \\ + g^{\rho\mu} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 J_4^{n+2}(z_i, z_j; \mathcal{A}_S) \Delta_{bi}^\nu \Delta_{dj}^\sigma + (2g^{\nu\lambda} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 J_4^{n+2}(z_i, z_j, z_k; \mathcal{A}_S) \Delta_{dj}^\sigma \Delta_{ck}^\rho \\ + 2g^{\rho\lambda} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 J_4^{n+2}(z_i, z_j, z_k; \mathcal{A}_S) \Delta_{bj}^\nu \Delta_{dk}^\sigma + 2g^{\sigma\lambda} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 J_4^{n+2}(z_i, z_j, z_k; \mathcal{A}_S) \Delta_{bj}^\nu \Delta_{ck}^\rho) \\ \left. \times \left( \sum_{l=1}^4 \sum_{l'=1}^4 \mathcal{S}_{ll'}^{-1} \Delta_{la}^\mu \Delta_{li}^\lambda \right) + n \left( \sum_{l=1}^4 b_l \Delta_{la}^\mu \right) \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 J_4^{n+2}(z_i, z_j, z_k; \mathcal{A}_S) \Delta_{bi}^\nu \Delta_{dj}^\sigma \Delta_{ck}^\rho \right] \Big\}$$

$$= \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \left\{ \frac{1}{4} (g^{\nu\sigma} g^{\rho\mu} + g^{\nu\rho} g^{\sigma\mu} + g^{\nu\mu} g^{\sigma\rho}) J_4^{n+4}(\mathcal{A}_S) \right. \quad (D.23) \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 (g^{\nu\sigma} \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \mathcal{S}_{jk}^{-1} \Delta_{ka}^\mu \Delta_{ji}^\rho + g^{\nu\rho} \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \mathcal{S}_{jk}^{-1} \Delta_{ka}^\mu \Delta_{ji}^\sigma \\ + g^{\sigma\rho} \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \mathcal{S}_{jk}^{-1} \Delta_{ka}^\mu \Delta_{ji}^\nu) J_4^{n+4}(z_i; \mathcal{A}_S) + \left( \frac{n+2}{4} - \frac{1}{2} \left( 2 - \frac{n}{2} \right) \right) \left( \sum_{l=1}^4 \sum_{l'=1}^4 \mathcal{S}_{ll'}^{-1} \Delta_{la}^\mu \right) \\ \times (g^{\nu\sigma} \sum_{k=1}^4 J_4^{n+4}(z_k; \mathcal{A}_S) \Delta_{ck}^\rho + g^{\nu\rho} \sum_{j=1}^4 J_4^{n+4}(z_j; \mathcal{A}_S) \Delta_{dj}^\sigma + g^{\sigma\rho} \sum_{i=1}^4 J_4^{n+4}(z_i; \mathcal{A}_S) \Delta_{bi}^\nu) \\ + \left( \left( 3 - \frac{n}{2} \right) - \frac{\Gamma(1+n/2)}{\Gamma(n/2)} \right) \left( \sum_{l=1}^4 \sum_{l'=1}^4 \mathcal{S}_{ll'}^{-1} \Delta_{la}^\mu \right) \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 J_4^{n+2}(z_i, z_j, z_k; \mathcal{A}_S) \Delta_{bi}^\nu \Delta_{cj}^\rho \Delta_{dk}^\sigma \\ - \left[ g^{\nu\mu} \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 J_4^{n+2}(z_j, z_k; \mathcal{A}_S) \Delta_{ck}^\rho \Delta_{dj}^\sigma + g^{\sigma\mu} \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 J_4^{n+2}(z_i, z_k; \mathcal{A}_S) \Delta_{bi}^\nu \Delta_{ck}^\rho \right. \\ + g^{\rho\mu} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 J_4^{n+2}(z_i, z_j; \mathcal{A}_S) \Delta_{bi}^\nu \Delta_{dj}^\sigma + 2 \sum_{l=1}^4 \sum_{l'=1}^4 \mathcal{S}_{ll'}^{-1} \left( \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 J_4^{n+2}(z_i, z_j, z_k; \mathcal{A}_S) \Delta_{dj}^\sigma \Delta_{ck}^\rho \Delta_{la}^\mu \Delta_{li}^\nu \right) \\ \left. + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 J_4^{n+2}(z_i, z_j, z_k; \mathcal{A}_S) \Delta_{bj}^\nu \Delta_{ck}^\rho \Delta_{la}^\mu \Delta_{li}^\sigma + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 J_4^{n+2}(z_i, z_j, z_k; \mathcal{A}_S) \Delta_{bj}^\nu \Delta_{dk}^\sigma \Delta_{la}^\mu \Delta_{li}^\rho \right] \Big\} .$$

On trouve alors :

$$\begin{aligned}
I_1 = & \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \left\{ \frac{1}{4} (g^{\nu\sigma} g^{\rho\mu} + g^{\nu\rho} g^{\sigma\mu} + g^{\nu\mu} g^{\sigma\rho}) J_4^{n+4}(\mathcal{A}_S) \right. \\
& + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^4 \left( \sum_{l'=1}^4 \mathcal{S}_{ll'}^{-1} \Delta_{l'a}^\mu \right) (g^{\nu\sigma} \Delta_{li}^\rho + g^{\nu\rho} \Delta_{li}^\sigma + g^{\sigma\rho} \Delta_{li}^\nu) J_4^{n+4}(z_i; \mathcal{A}_S) \\
& + \frac{n-1}{2} \left( \sum_{l=1}^4 \sum_{l'=1}^4 \mathcal{S}_{ll'}^{-1} \Delta_{l'a}^\mu \right) \sum_{i=1}^4 (g^{\nu\sigma} \Delta_{ci}^\rho + g^{\nu\rho} \Delta_{di}^\sigma + g^{\sigma\rho} \Delta_{bi}^\nu) J_4^{n+4}(z_i; \mathcal{A}_S) \\
& + \sum_{l=1}^4 \sum_{l'=1}^4 (\mathcal{S}_{ll'}^{-1} \Delta_{l'a}^\mu) \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 J_4^{n+2}(z_i, z_j, z_k; \mathcal{A}_S) \left[ (3-n) (\Delta_{bi}^\nu \Delta_{cj}^\rho \Delta_{dk}^\sigma) \right. \\
& - (\Delta_{dj}^\sigma \Delta_{ck}^\rho \Delta_{li}^\nu + \Delta_{bj}^\nu \Delta_{ck}^\rho \Delta_{li}^\sigma + \Delta_{bj}^\nu \Delta_{dk}^\sigma \Delta_{li}^\rho) \Big] \\
& - \frac{1}{2} \left( \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 g^{\nu\mu} J_4^{n+2}(z_j, z_k; \mathcal{A}_S) \Delta_{dj}^\sigma \Delta_{ck}^\rho + \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 g^{\sigma\mu} J_4^{n+2}(z_i, z_k; \mathcal{A}_S) \Delta_{bi}^\nu \Delta_{ck}^\rho \right. \\
& \left. \left. + \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 g^{\rho\mu} J_4^{n+2}(z_i, z_j; \mathcal{A}_S) \Delta_{bi}^\nu \Delta_{dj}^\sigma \right) \right\} .
\end{aligned} \tag{D.24}$$

Au final, on a :

$$\begin{aligned}
I_1 = & \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \left\{ \frac{1}{4} (g^{\nu\sigma} g^{\rho\mu} + g^{\nu\rho} g^{\sigma\mu} + g^{\nu\mu} g^{\sigma\rho}) J_4^{n+4}(\mathcal{A}_S) \right. \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{l=1}^4 \sum_{l'=1}^4 \mathcal{S}_{ll'}^{-1} \Delta_{l'a}^\mu \left( g^{\nu\sigma} (\Delta_{li}^\rho + (n-1) \Delta_{ci}^\rho) \right. \\
& \left. + g^{\nu\rho} (\Delta_{li}^\sigma + (n-1) \Delta_{di}^\sigma) + g^{\sigma\rho} (\Delta_{li}^\nu + (n-1) \Delta_{bi}^\nu) \right) J_4^{n+4}(z_i; \mathcal{A}_S) \Big\} \\
& + \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \left\{ \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \sum_{l'=1}^4 \mathcal{S}_{ll'}^{-1} J_4^{n+2}(z_i, z_j, z_k; \mathcal{A}_S) \right. \\
& \times \left[ (3-n) \Delta_{bi}^\nu \Delta_{dj}^\sigma \Delta_{ck}^\rho - \Delta_{dj}^\sigma \Delta_{ck}^\rho \Delta_{li}^\nu - \Delta_{bj}^\nu \Delta_{ck}^\rho \Delta_{li}^\sigma - \Delta_{bj}^\nu \Delta_{dk}^\sigma \Delta_{li}^\rho \right] \\
& - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^4 \sum_{k=1}^4 g^{\nu\mu} \Delta_{dj}^\sigma \Delta_{ck}^\rho J_4^{n+2}(z_j, z_k; \mathcal{A}_S) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 g^{\sigma\mu} \Delta_{bi}^\nu \Delta_{ck}^\rho J_4^{n+2}(z_i, z_k; \mathcal{A}_S) \\
& \left. - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 g^{\rho\mu} \Delta_{bi}^\nu \Delta_{dj}^\sigma J_4^{n+2}(z_i, z_j; \mathcal{A}_S) \right\} .
\end{aligned} \tag{D.18}$$

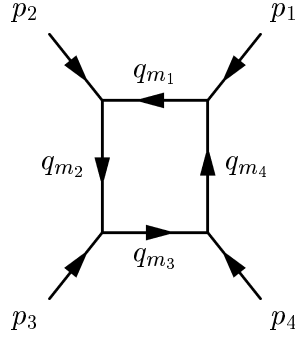


FIG. D.1 – Diagramme à 4 points.

On obtient ainsi les intégrales à 4 points et de rang 4 en fonction d'intégrales à 6 et 8 dimensions, sans ou avec paramètres de Feynman. Comme nous l'avons vu au chapitre 3, il n'est pas nécessaire de calculer toutes ces intégrales et car il existe des relations entre elles. En effet, on peut écrire les intégrales avec  $p$  paramètres de Feynman en fonction d'intégrales avec  $p - 1$  (ou moins) paramètres de Feynman et d'intégrales à 3 points.

Pour une fonction à 4 points qui contient les propagateurs  $q_{m_1}$ ,  $q_{m_2}$ ,  $q_{m_3}$ ,  $q_{m_4}$  (voir figure D.1), on définit :

$$\begin{aligned}
 p_1 &= q_{m_1} - q_{m_4} , \\
 p_2 &= q_{m_2} - q_{m_1} , \\
 p_3 &= q_{m_3} - q_{m_2} , \\
 p_4 &= q_{m_4} - q_{m_3} ,
 \end{aligned}
 \tag{D.19}$$

où  $(q_{m_i} - q_{m_j})^2 = S_{m_i m_j}$ , et on place les arguments de cette fonction dans l'ordre suivant :

$$\mathcal{A}_S : (p_2 + p_3)^2, (p_1 + p_2)^2, p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2 .$$

On considère ici le cas avec une seule patte massive. Par un relabeling des propagateurs internes, on fait en sorte que la patte massive se retrouve en  $p_4$ .

On utilise les mêmes notations et définitions que dans l'annexe C.

Il est possible de réduire le nombre de paramètres de Feynman des  $J_4^{n+2}$  en utilisant les

relations suivantes :

$$\begin{aligned}
J_4^{n+2}(z_j, z_k, z_l; \mathcal{A}_S) = & \frac{1}{2B^{[S]}} \left\{ b_l^{[S]} J_4^{n+2}(z_j, z_k; \mathcal{A}_S) + b_k^{[S]} J_4^{n+2}(z_j, z_l; \mathcal{A}_S) + b_j^{[S]} J_4^{n+2}(z_k, z_l; \mathcal{A}_S) \right. \\
& - \frac{1}{3} \left( \mathcal{S}_{jk}^{[S]-1} J_4^{n+2}(z_l; \mathcal{A}_S) + \mathcal{S}_{jl}^{[S]-1} J_4^{n+2}(z_k; \mathcal{A}_S) + \mathcal{S}_{kl}^{[S]-1} J_4^{n+2}(z_j; \mathcal{A}_S) \right) \\
& - \frac{1}{4} \sum_{i \in S - \{j, k, l\}} b_i^{[S]} J_3^n(z_{p(j, S - \{i\})}, z_{p(k, S - \{i\})}, z_{p(l, S - \{i\})}; \mathcal{A}_{S - \{i\}}) \\
& + \frac{1}{12} \left( \sum_{i \in S - \{j, k\}} \mathcal{S}_{il}^{[S]-1} J_3^n(z_{p(j, S - \{i\})}, z_{p(k, S - \{i\})}; \mathcal{A}_{S - \{i\}}) \right. \\
& + \sum_{i \in S - \{j, l\}} \mathcal{S}_{ik}^{[S]-1} \mathcal{S}_{il}^{[S]-1} J_3^n(z_{p(j, S - \{i\})}, z_{p(l, S - \{i\})}; \mathcal{A}_{S - \{i\}}) \\
& + \sum_{i \in S - \{k, l\}} \mathcal{S}_{ij}^{[S]-1} \mathcal{S}_{il}^{[S]-1} J_3^n(z_{p(k, S - \{i\})}, z_{p(l, S - \{i\})}; \mathcal{A}_{S - \{i\}}) \left. \right) \left. \right\} , \tag{D.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_4^{n+2}(z_l, z_m; \mathcal{A}_S) = & \frac{2}{3B^{[S]}} \left\{ b_l^{[S]} J_4^{n+2}(z_m; \mathcal{A}_S) + b_m^{[S]} J_4^{n+2}(z_l; \mathcal{A}_S) - \frac{1}{2} \mathcal{S}_{lm}^{[S]-1} J_4^{n+2}(\mathcal{A}_S) \right. \\
& - \frac{1}{4} \sum_{j \in S - \{l, m\}} b_j^{[S]} J_3^n(z_{p(l, S - \{i\})}, z_{p(m, S - \{i\})}; \mathcal{A}_{S - \{j\}}) \\
& + \frac{1}{8} \sum_{j \in S - \{l\}} \mathcal{S}_{jm}^{[S]-1} J_3^n(z_{p(l, S - \{i\})}; \mathcal{A}_{S - \{j\}}) \\
& + \frac{1}{8} \sum_{j \in S - \{m\}} \mathcal{S}_{jl}^{[S]-1} J_3^n(z_{p(m, S - \{i\})}; \mathcal{A}_{S - \{j\}}) \left. \right\} , \tag{D.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_4^{n+2}(z_l; \mathcal{A}_S) = & \frac{1}{B^{[S]}} \left\{ b_l^{[S]} J_4^{n+2}(\mathcal{A}_S) + \frac{1}{4} \sum_{j \in S} \mathcal{S}_{jl}^{[S]-1} J_3^n(\mathcal{A}_{S - \{j\}}) \right. \\
& \left. - \frac{1}{4} \sum_{j \in S - \{l\}} b_j^{[S]} J_3^n(z_{p(l, S - \{i\})}; \mathcal{A}_{S - \{j\}}) \right\} , \tag{D.22}
\end{aligned}$$

et pour les intégrales à 8 dimensions :

$$\begin{aligned}
J_4^{n+4}(z_l; \mathcal{A}_S) = & \frac{1}{48} + \frac{1}{2B^{[S]}} \left\{ b_l^{[S]} \left( J_4^{n+4}(\mathcal{A}_S) - \frac{1}{18} \right) \right. \\
& + \frac{1}{3} J_4^6(z_l; \mathcal{A}_S) + \frac{1}{2} \sum_{j \in S - \{l\}} b_j^{[S]} J_3^{n+2}(z_{p(l, S - \{j\})}; \mathcal{A}_{S - \{i\}}) \\
& \left. - \frac{1}{6} \sum_{j \in S} \mathcal{S}_{lj}^{[S]-1} J_3^{n+2}(\mathcal{A}_{S - \{j\}}) \right\} , \tag{D.23}
\end{aligned}$$

$$J_4^{n+4}(\mathcal{A}_S) = \frac{1}{3B^{[S]}} J_4^{n+2}(\mathcal{A}_S) + \frac{1}{9} + \frac{1}{3B^{[S]}} \sum_{j \in S} b_j^{[S]} J_3^{n+2}(\mathcal{A}_{S-\{j\}}) . \quad (\text{D.24})$$

Il est utile de mentionner aussi une autre caractéristique de ces intégrales. Considérons des intégrales avec un seul paramètre de Feynman. Quatre possibilités existent :

$$J_4^{n+2}(z_1; \mathcal{A}_S), J_4^{n+2}(z_2; \mathcal{A}_S), J_4^{n+2}(z_3; \mathcal{A}_S), J_4^{n+2}(z_4; \mathcal{A}_S) .$$

En effet, seulement deux de ces quatre intégrales sont indépendantes, puisque :

$$J_4^{n+2}(z_1; \mathcal{A}_S) = \frac{1}{2} J_4^{n+2}(\mathcal{A}_S) - J_4^{n+2}(z_4; \mathcal{A}_S) , \quad (\text{D.25})$$

$$J_4^{n+2}(z_2; \mathcal{A}_S) = \frac{1}{2} J_4^{n+2}(\mathcal{A}_S) - J_4^{n+2}(z_3; \mathcal{A}_S) . \quad (\text{D.26})$$

#### Démonstration :

On peut appliquer la relation (3.59) à notre cas :

$$\begin{aligned} J_4^6(z_1; \mathcal{A}_S) &= \frac{1}{B^{[S]}} \left\{ b_1^{[S]} J_4^6(\mathcal{A}_S) + \frac{1}{2} \sum_{j \in S} \mathcal{S}^{[S]-1}_{j1} J_3^n(\mathcal{A}_{S-\{j\}}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{j \in S-\{1\}} b_j^{[S]} J_3^n(z_{p(1,S-\{j\})}; \mathcal{A}_{S-\{j\}}) \right\} , \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

et

$$\begin{aligned} J_4^6(z_4; \mathcal{A}_S) &= \frac{1}{B^{[S]}} \left\{ b_5^{[S]} J_4^6(\mathcal{A}_S) + \frac{1}{2} \sum_{j \in S} \mathcal{S}^{[S]-1}_{j5} J_3^n(\mathcal{A}_{S-\{j\}}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{j \in S-\{5\}} b_j^{[S]} J_3^n(z_{p(5,S-\{j\})}; \mathcal{A}_{S-\{j\}}) \right\} . \end{aligned} \quad (\text{D.28})$$

D'où :

$$\begin{aligned} J_4^6(z_1; \mathcal{A}_S) + J_4^6(z_4; \mathcal{A}_S) &= \frac{1}{B^{[S]}} \left\{ (b_1^{[S]} + b_5^{[S]}) J_4^6(\mathcal{A}_S) \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j \in S} (\mathcal{S}^{[S]-1}_{j1} + \mathcal{S}^{[S]-1}_{j5}) J_3^n(\mathcal{A}_{S-\{j\}}) \\ &\quad - \frac{1}{2} (b_2^{[S]} J_3^n(z_1; \mathcal{A}_{S-\{2\}}) + b_3^{[S]} J_3^n(z_1; \mathcal{A}_{S-\{3\}}) \\ &\quad + b_5^{[S]} J_3^n(z_1; \mathcal{A}_{S-\{5\}}) + b_1^{[S]} J_3^n(z_3; \mathcal{A}_{S-\{1\}}) \\ &\quad \left. + b_2^{[S]} J_3^n(z_3; \mathcal{A}_{S-\{2\}}) + b_3^{[S]} J_3^n(z_3; \mathcal{A}_{S-\{3\}})) \right\} . \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$

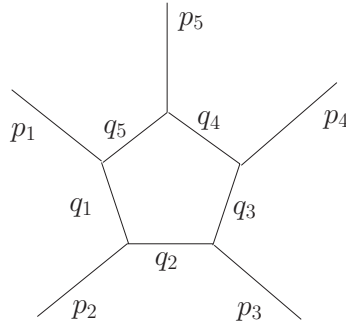
On a :

$$\begin{aligned}
 J_4^6(z_1; \mathcal{A}_S) + J_4^6(z_4; \mathcal{A}_S) = & \frac{1}{2 B^{[S]}} \left\{ B^{[S]} J_4^6(\mathcal{A}_S) \right. \\
 & + b_2^{[S]} J_3^n(z_3; \mathcal{A}_{S-\{2\}}) + b_3^{[S]} J_3^n(z_3; \mathcal{A}_{S-\{3\}}) \\
 & - b_1^{[S]} J_3^n(z_3; \mathcal{A}_{S-\{1\}}) - b_2^{[S]} (J_3^n(z_1; \mathcal{A}_{S-\{2\}}) + J_3^n(z_3; \mathcal{A}_{S-\{2\}})) \\
 & \left. - b_3^{[S]} (J_3^n(z_1; \mathcal{A}_{S-\{2\}}) + J_3^n(z_3; \mathcal{A}_{S-\{3\}})) - b_5^{[S]} J_3^n(z_1; \mathcal{A}_{S-\{3\}}) \right\} .
 \end{aligned} \tag{D.30}$$

Et finalement :

$$\begin{aligned}
 J_4^6(z_1; \mathcal{A}_S) + J_4^6(z_4; \mathcal{A}_S) = & \frac{1}{2 B^{[S]}} \left\{ B^{[S]} J_4^6(\mathcal{A}_S) \right. \\
 & + \left( -b_1^{[S]} J_3^n(z_3; \mathcal{A}_{S-\{1\}}) + b_2^{[S]} J_3^n(z_2; \mathcal{A}_{S-\{2\}}) \right. \\
 & \left. \left. + b_3^{[S]} J_3^n(z_2; \mathcal{A}_{S-\{3\}}) - b_5^{[S]} (J_3^n(z_1; \mathcal{A}_{S-\{5\}})) \right) \right\} .
 \end{aligned} \tag{D.31}$$

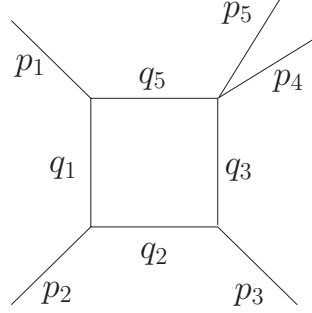
Le diagramme à 5 points a la forme :



La liste  $S_5$  associée à ce diagramme s'écrit :

$$S_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\} .$$

Le diagramme à 4 points s'obtient à partir du diagramme à 5 points en pinçant les pattes 3 et 5, et par conséquent, 4 disparaît :



La liste  $S$  associée à ce diagramme se trouve en enlevant l'indice 4 :

$$S = \{1, 2, 3, 5\} = \{m_1, m_2, m_3, m_4\} \quad .$$

La matrice  $\mathcal{S}$  associée s'obtient en supprimant la colonne et la ligne 4 de la matrice  $\mathcal{S}$  du diagramme à 5 points. L'inverse de la matrice  $\mathcal{S}$  à 4 points s'écrit :

$$\mathcal{S}^{[S]-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\mathcal{S}_{35}}{\mathcal{S}_{13}\mathcal{S}_{25}} & \frac{1}{\mathcal{S}_{13}} & 0 \\ \frac{-\mathcal{S}_{35}}{\mathcal{S}_{13}\mathcal{S}_{25}} & 0 & 0 & \frac{1}{\mathcal{S}_{25}} \\ \frac{1}{\mathcal{S}_{13}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathcal{S}_{25}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.32})$$

On a donc :

$$b_1^{[S]} = \frac{\mathcal{S}_{25} - \mathcal{S}_{35}}{\mathcal{S}_{13}\mathcal{S}_{25}} \quad , \quad (\text{D.33})$$

$$b_2^{[S]} = \frac{\mathcal{S}_{13} - \mathcal{S}_{35}}{\mathcal{S}_{13}\mathcal{S}_{25}} \quad , \quad (\text{D.34})$$

$$b_3^{[S]} = \frac{1}{\mathcal{S}_{13}} \quad , \quad (\text{D.35})$$

$$b_5^{[S]} = \frac{1}{\mathcal{S}_{25}} \quad . \quad (\text{D.36})$$

D'où :

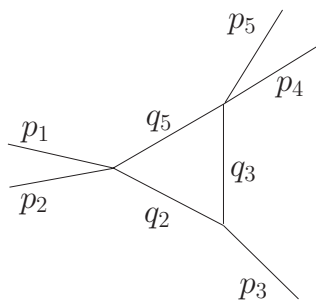
$$B^{[S]} = \frac{2(\mathcal{S}_{13} + \mathcal{S}_{25} - \mathcal{S}_{35})}{\mathcal{S}_{13}\mathcal{S}_{25}} \quad . \quad (\text{D.37})$$

On remarquera que

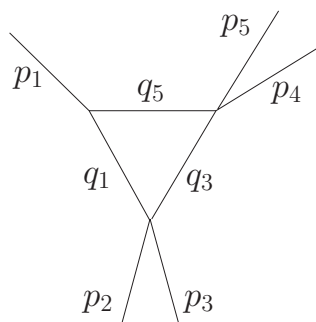
$$b_1^{[S]} + b_5^{[S]} = \frac{1}{2}B^{[S]} \quad . \quad (\text{D.38})$$



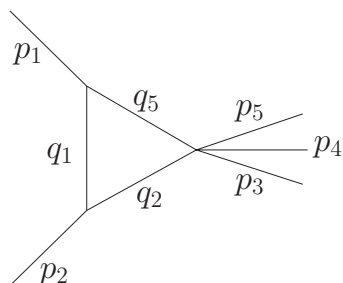
Les fonctions à 3 points s'obtiennent en pinçant les différentes pattes du diagramme à 4 points. Ainsi, on a :



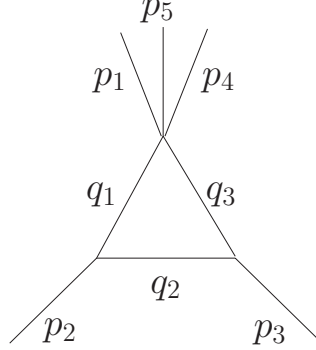
associé à la liste  $S - \{1\}$ ,



associé à la liste  $S - \{2\}$ ,



associé à la liste  $S - \{3\}$ , et enfin



associé à la liste  $S - \{5\}$ .

On en déduit :

$$J_3^n(z_3; \mathcal{A}_{S-\{1\}}) = J_3^n(z_3; 0, \mathcal{S}_{35}, \mathcal{S}_{25}) , \quad (\text{D.39})$$

$$J_3^n(z_2; \mathcal{A}_{S-\{2\}}) = J_3^n(z_3; 0, \mathcal{S}_{13}, \mathcal{S}_{35}) , \quad (\text{D.40})$$

$$J_3^n(z_2; \mathcal{A}_{S-\{3\}}) = J_3^n(z_3; 0, 0, \mathcal{S}_{25}) , \quad (\text{D.41})$$

$$J_3^n(z_1; \mathcal{A}_{S-\{5\}}) = J_3^n(z_1; 0, 0, \mathcal{S}_{13}) . \quad (\text{D.42})$$

On va pouvoir maintenant remplacer les  $J_3^n$  par leurs expressions, données dans l'annexe C. L'égalité (D.31) s'écrit donc :

$$\begin{aligned} J_4^6(z_1; \mathcal{A}_S) + J_4^6(z_4; \mathcal{A}_S) = & \frac{1}{2 B^{[S]}} \left\{ B^{[S]} J_4^6(\mathcal{A}_S) \right. \\ & + \left( -b_1 \frac{1}{\varepsilon_{ir}} (1 - 2\varepsilon_{ir}) \varepsilon_{ir} \frac{\ln(\overline{\mathcal{S}}_{25}) - \ln(\overline{\mathcal{S}}_{35})}{\mathcal{S}_{25} - \mathcal{S}_{35}} \right. \\ & + b_2 \frac{1}{\varepsilon_{ir}} (1 - 2\varepsilon_{ir}) \varepsilon_{ir} \frac{\ln(\overline{\mathcal{S}}_{13}) - \ln(\overline{\mathcal{S}}_{35})}{\mathcal{S}_{13} - \mathcal{S}_{35}} \\ & + \frac{b_3}{\mathcal{S}_{25}} \frac{1}{\varepsilon_{ir}} (1 + \varepsilon_{ir} \ln(\overline{\mathcal{S}}_{25})) (1 - 2\varepsilon_{ir}) \\ & \left. \left. - \frac{b_5}{\mathcal{S}_{13}} \frac{1}{\varepsilon_{ir}} (1 + \varepsilon_{ir} \ln(\overline{\mathcal{S}}_{13})) (1 - 2\varepsilon_{ir}) \right) \right\} . \end{aligned} \quad (\text{D.43})$$

En remplaçant les  $b_i$  par leurs valeurs, de nombreux termes s'annulent, et on trouve finalement :

$$J_4^{n+2}(z_1; \mathcal{A}_S) = \frac{1}{2} J_4^{n+2}(\mathcal{A}_S) - J_4^{n+2}(z_4; \mathcal{A}_S) . \quad (\text{D.44})$$

On peut aussi montrer que :

$$J_4^{n+2}(z_1, z_1; \mathcal{A}_S) = \frac{2}{3} J_4^{n+2}(z_1; \mathcal{A}_S) - J_4^{n+2}(z_1, z_4; \mathcal{A}_S) , \quad (\text{D.45})$$

$$J_4^{n+2}(z_1, z_2; \mathcal{A}_S) = \frac{1}{3} J_4^{n+2}(z_1; \mathcal{A}_S) - J_4^{n+2}(z_1, z_3; \mathcal{A}_S) , \quad (\text{D.46})$$

$$J_4^{n+2}(z_2, z_2; \mathcal{A}_S) = \frac{2}{3} J_4^{n+2}(z_2; \mathcal{A}_S) - J_4^{n+2}(z_2, z_3; \mathcal{A}_S) , \quad (\text{D.47})$$

$$\begin{aligned} J_4^{n+2}(z_2, z_4; \mathcal{A}_S) &= \frac{1}{3} J_4^{n+2}(z_2; \mathcal{A}_S) - \frac{1}{3} J_4^{n+2}(z_1; \mathcal{A}_S) \\ &\quad + J_4^{n+2}(z_1, z_3; \mathcal{A}_S) , \end{aligned} \quad (\text{D.48})$$

$$J_4^{n+2}(z_3, z_3; \mathcal{A}_S) = \frac{2}{3} J_4^{n+2}(z_3; \mathcal{A}_S) - J_4^{n+2}(z_2, z_3; \mathcal{A}_S) , \quad (\text{D.49})$$

$$J_4^{n+2}(z_3, z_4; \mathcal{A}_S) = \frac{1}{3} J_4^{n+2}(z_3; \mathcal{A}_S) - J_4^{n+2}(z_1, z_3; \mathcal{A}_S) , \quad (\text{D.50})$$

$$J_4^{n+2}(z_4, z_4; \mathcal{A}_S) = \frac{2}{3} J_4^{n+2}(z_4; \mathcal{A}_S) - J_4^{n+2}(z_1, z_4; \mathcal{A}_S) . \quad (\text{D.51})$$

## Annexe E

# Intégrales à 5 points

On prend le cas général d'une intégrale à N points. On veut calculer :

$$I_N^{\mu\nu\rho\sigma\theta} \equiv \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{q_a^\mu q_b^\nu q_c^\rho q_d^\sigma q_e^\theta}{\prod_{i=1}^N q_i^2} . \quad (\text{E.1})$$

D'après la méthode de réduction :

$$I_N^{\mu\nu\rho\sigma\theta} = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{q_a^\mu q_b^\nu q_c^\rho q_d^\sigma (q_e^\theta - \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{je}^\theta q_j^2)}{\prod_{i=1}^N q_i^2} + \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{q_a^\mu q_b^\nu q_c^\rho q_d^\sigma (\sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{je}^\theta q_j^2)}{\prod_{i=1}^N q_i^2} , \quad (\text{E.2})$$

avec :

$$\mathcal{C}_{je}^\theta = - \sum_{i=1}^N \mathcal{S}_{ji}^{-1} \Delta_{ie}^\theta . \quad (\text{E.3})$$

On effectue la transformation :

$$q_e^\theta - \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{je}^\theta q_j^2 \longrightarrow l^\lambda \left( \mathcal{T}_{ef}^{\theta\lambda} + 2 \sum_{i=1}^N z_i \Delta_{fi}^\lambda \mathcal{V}_e^\theta \right) + (l^2 + R^2) \mathcal{V}_e^\theta , \quad (\text{E.4})$$

où  $f$  est un indice arbitraire,

$$\mathcal{T}_{ab}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + 2 \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \mathcal{S}_{jk}^{-1} \Delta_{ja}^\mu \Delta_{kb}^\nu , \quad (\text{E.5})$$

et

$$\mathcal{V}_a^\mu = \sum_{k=1}^N b_k \Delta_{ka}^\mu . \quad (\text{E.6})$$

L'intégrale de droite se réduit à une intégrale à 4 points. Soit  $I_1$  l'intégrale de gauche :

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{q_a^\mu q_b^\nu q_c^\rho q_d^\sigma (q_e^\theta - \sum_{j=1}^N \mathcal{C}_{je}^\theta q_j^2)}{\prod_{i=1}^N q_i^2} \\ &= \Gamma(N) \int_0^1 \prod_{i=1}^N dz_i \delta(1 - \sum_{i=1}^N z_i) \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2 - R^2)^N} \\ &\quad \times \left[ q_a^\mu q_b^\nu q_c^\rho q_d^\sigma \left( l^\lambda (\mathcal{T}_{ef}^{\theta\lambda} + 2 \sum_{i=1}^N z_i \Delta_{fi}^\lambda \mathcal{V}_e^\theta) + (l^2 + R^2) \mathcal{V}_e^\theta \right) \right] . \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Or :

$$q_j \longrightarrow l + \sum_{i=1}^N z_i \Delta_{ji} . \quad (\text{E.8})$$

D'où :

$$\begin{aligned} I_1 &= \Gamma(N) \int_0^1 \prod_{i=1}^N dz_i \delta(1 - \sum_{i=1}^N z_i) \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2 - R^2)^N} \\ &\quad \times \left( l^\lambda (\mathcal{T}_{ef}^{\theta\lambda} + 2 \sum_{i=1}^N z_i \Delta_{fi}^\lambda \mathcal{V}_e^\theta) + (l^2 + R^2) \mathcal{V}_e^\theta \right) \\ &\quad \times \left[ (l^\mu + \sum_{j_1=1}^N z_{j_1} \Delta_{aj_1}^\mu) (l^\mu + \sum_{j_2=1}^N z_{j_2} \Delta_{bj_2}^\mu) (l^\mu + \sum_{j_3=1}^N z_{j_3} \Delta_{cj_3}^\mu) (l^\mu + \sum_{j_4=1}^N z_{j_4} \Delta_{dj_4}^\mu) \right] . \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

En ne gardant que les exposants pairs de  $l$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
I_1 = & \Gamma(N) \int_0^1 \prod_{i=1}^N dz_i \delta(1 - \sum_{i=1}^N z_i) \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2 - R^2)^N} \left[ l^\mu l^\nu l^\rho l^\theta (l^2 + R^2) \mathcal{V}_e^\theta \right. \\
& + l^\mu l^\nu l^\rho l^\lambda (\mathcal{T}_{ef}^{\theta\lambda} + 2 \sum_{i=1}^N z_i \Delta_{fi}^\lambda \mathcal{V}_e^\theta) \left( \sum_{j_4=1}^N z_{j_4} \Delta_{dj_4}^\sigma \right) \\
& + l^\mu l^\rho l^\sigma l^\lambda (\mathcal{T}_{ef}^{\theta\lambda} + 2 \sum_{i=1}^N z_i \Delta_{fi}^\lambda \mathcal{V}_e^\theta) \left( \sum_{j_2=1}^N z_{j_2} \Delta_{bj_2}^\nu \right) \\
& + l^\mu l^\nu l^\sigma l^\lambda (\mathcal{T}_{ef}^{\theta\lambda} + 2 \sum_{i=1}^N z_i \Delta_{fi}^\lambda \mathcal{V}_e^\theta) \left( \sum_{j_3=1}^N z_{j_3} \Delta_{cj_3}^\rho \right) \\
& + l^\nu l^\rho l^\sigma l^\lambda (\mathcal{T}_{ef}^{\theta\lambda} + 2 \sum_{i=1}^N z_i \Delta_{fi}^\lambda \mathcal{V}_e^\theta) \left( \sum_{j_1=1}^N z_{j_1} \Delta_{aj_1}^\mu \right) \\
& + l^\mu l^\nu (l^2 + R^2) \left( \sum_{j_3=1}^N z_{j_3} \Delta_{cj_3}^\rho \right) \left( \sum_{j_4=1}^N z_{j_4} \Delta_{dj_4}^\sigma \right) \mathcal{V}_e^\theta \\
& + l^\mu l^\rho (l^2 + R^2) \left( \sum_{j_2=1}^N z_{j_2} \Delta_{bj_2}^\nu \right) \left( \sum_{j_4=1}^N z_{j_4} \Delta_{dj_4}^\sigma \right) \mathcal{V}_e^\theta \\
& + l^\mu l^\sigma (l^2 + R^2) \left( \sum_{j_2=1}^N z_{j_2} \Delta_{bj_2}^\nu \right) \left( \sum_{j_3=1}^N z_{j_3} \Delta_{cj_3}^\rho \right) \mathcal{V}_e^\theta \\
& + l^\nu l^\rho (l^2 + R^2) \left( \sum_{j_1=1}^N z_{j_1} \Delta_{aj_1}^\mu \right) \left( \sum_{j_4=1}^N z_{j_4} \Delta_{dj_4}^\sigma \right) \mathcal{V}_e^\theta \\
& + l^\nu l^\sigma (l^2 + R^2) \left( \sum_{j_1=1}^N z_{j_1} \Delta_{aj_1}^\mu \right) \left( \sum_{j_3=1}^N z_{j_3} \Delta_{cj_3}^\rho \right) \mathcal{V}_e^\theta \\
& + l^\rho l^\sigma (l^2 + R^2) \left( \sum_{j_1=1}^N z_{j_1} \Delta_{aj_1}^\mu \right) \left( \sum_{j_2=1}^N z_{j_2} \Delta_{bj_2}^\nu \right) \mathcal{V}_e^\theta \\
& + l^\mu l^\lambda (\mathcal{T}_{ef}^{\theta\lambda} + 2 \sum_{i=1}^N z_i \Delta_{fi}^\lambda \mathcal{V}_e^\theta) \left( \sum_{j_2=1}^N z_{j_2} \Delta_{bj_2}^\nu \right) \left( \sum_{j_3=1}^N z_{j_3} \Delta_{cj_3}^\rho \right) \left( \sum_{j_4=1}^N z_{j_4} \Delta_{dj_4}^\sigma \right) \\
& + l^\nu l^\lambda (\mathcal{T}_{ef}^{\theta\lambda} + 2 \sum_{i=1}^N z_i \Delta_{fi}^\lambda \mathcal{V}_e^\theta) \left( \sum_{j_1=1}^N z_{j_1} \Delta_{aj_1}^\mu \right) \left( \sum_{j_3=1}^N z_{j_3} \Delta_{cj_3}^\rho \right) \left( \sum_{j_4=1}^N z_{j_4} \Delta_{dj_4}^\sigma \right) \\
& + l^\rho l^\lambda (\mathcal{T}_{ef}^{\theta\lambda} + 2 \sum_{i=1}^N z_i \Delta_{fi}^\lambda \mathcal{V}_e^\theta) \left( \sum_{j_1=1}^N z_{j_1} \Delta_{aj_1}^\mu \right) \left( \sum_{j_2=1}^N z_{j_2} \Delta_{bj_2}^\nu \right) \left( \sum_{j_4=1}^N z_{j_4} \Delta_{dj_4}^\sigma \right) \\
& + l^\sigma l^\lambda (\mathcal{T}_{ef}^{\theta\lambda} + 2 \sum_{i=1}^N z_i \Delta_{fi}^\lambda \mathcal{V}_e^\theta) \left( \sum_{j_1=1}^N z_{j_1} \Delta_{aj_1}^\mu \right) \left( \sum_{j_2=1}^N z_{j_2} \Delta_{bj_2}^\nu \right) \left( \sum_{j_3=1}^N z_{j_3} \Delta_{cj_3}^\rho \right) \\
& \left. + (l^2 + R^2) \left( \sum_{j_1=1}^N z_{j_1} \Delta_{aj_1}^\mu \right) \left( \sum_{j_2=1}^N z_{j_2} \Delta_{bj_2}^\nu \right) \left( \sum_{j_3=1}^N z_{j_3} \Delta_{cj_3}^\rho \right) \left( \sum_{j_4=1}^N z_{j_4} \Delta_{dj_4}^\sigma \right) \right] . \quad (\text{E.10})
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
I_1 = & \Gamma(N) \int_0^1 \prod_{i=1}^N dz_i \delta(1 - \sum_{i=1}^N z_i) \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2 - R^2)^N} \\
& \times \left\{ \frac{l^4}{n(n+2)} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) (l^2 + R^2) \mathcal{V}_e^\theta \right. \\
& + \frac{l^4}{n(n+2)} (\mathcal{T}_{ef}^{\theta\lambda} + 2 \sum_{i=1}^N z_i \Delta_{fi}^\lambda \mathcal{V}_e^\theta) \left[ (g^{\mu\nu} g^{\rho\lambda} + g^{\mu\rho} g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho}) \left( \sum_{j_4=1}^N z_{j_4} \Delta_{dj_4}^\sigma \right) \right. \\
& + (g^{\mu\rho} g^{\sigma\lambda} + g^{\mu\sigma} g^{\rho\lambda} + g^{\mu\lambda} g^{\rho\sigma}) \left( \sum_{j_2=1}^N z_{j_2} \Delta_{bj_2}^\nu \right) \\
& + (g^{\mu\nu} g^{\sigma\lambda} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda} g^{\nu\sigma}) \left( \sum_{j_3=1}^N z_{j_3} \Delta_{cj_3}^\rho \right) \\
& \left. + (g^{\nu\rho} g^{\sigma\lambda} + g^{\nu\sigma} g^{\rho\lambda} + g^{\nu\lambda} g^{\rho\sigma}) \left( \sum_{j_1=1}^N z_{j_1} \Delta_{aj_1}^\mu \right) \right] \\
& + \frac{l^2}{n} (l^2 + R^2) \mathcal{V}_e^\theta \left[ g^{\mu\nu} \left( \sum_{j_3=1}^N z_{j_3} \Delta_{cj_3}^\rho \right) \left( \sum_{j_4=1}^N z_{j_4} \Delta_{dj_4}^\sigma \right) \right. \\
& + g^{\mu\rho} \left( \sum_{j_2=1}^N z_{j_2} \Delta_{bj_2}^\nu \right) \left( \sum_{j_4=1}^N z_{j_4} \Delta_{dj_4}^\sigma \right) + g^{\mu\sigma} \left( \sum_{j_2=1}^N z_{j_2} \Delta_{bj_2}^\nu \right) \left( \sum_{j_3=1}^N z_{j_3} \Delta_{cj_3}^\rho \right) \\
& + g^{\nu\rho} \left( \sum_{j_1=1}^N z_{j_1} \Delta_{aj_1}^\mu \right) \left( \sum_{j_4=1}^N z_{j_4} \Delta_{dj_4}^\sigma \right) + g^{\nu\sigma} \left( \sum_{j_1=1}^N z_{j_1} \Delta_{aj_1}^\mu \right) \left( \sum_{j_3=1}^N z_{j_3} \Delta_{cj_3}^\rho \right) \\
& \left. + g^{\rho\sigma} \left( \sum_{j_1=1}^N z_{j_1} \Delta_{aj_1}^\mu \right) \left( \sum_{j_2=1}^N z_{j_2} \Delta_{bj_2}^\nu \right) \right] \\
& + l^2 (\mathcal{T}_{ef}^{\theta\lambda} + 2 \sum_{i=1}^N z_i \Delta_{fi}^\lambda \mathcal{V}_e^\theta) g^{\mu\lambda} \left( \sum_{j_2=1}^N z_{j_2} \Delta_{bj_2}^\nu \right) \left( \sum_{j_3=1}^N z_{j_3} \Delta_{cj_3}^\rho \right) \left( \sum_{j_4=1}^N z_{j_4} \Delta_{dj_4}^\sigma \right) \\
& + g^{\nu\lambda} \left( \sum_{j_1=1}^N z_{j_1} \Delta_{aj_1}^\mu \right) \left( \sum_{j_3=1}^N z_{j_3} \Delta_{cj_3}^\rho \right) \left( \sum_{j_4=1}^N z_{j_4} \Delta_{dj_4}^\sigma \right) \\
& + g^{\rho\lambda} \left( \sum_{j_1=1}^N z_{j_1} \Delta_{aj_1}^\mu \right) \left( \sum_{j_2=1}^N z_{j_2} \Delta_{bj_2}^\nu \right) \left( \sum_{j_4=1}^N z_{j_4} \Delta_{dj_4}^\sigma \right) \\
& + g^{\sigma\lambda} \left( \sum_{j_1=1}^N z_{j_1} \Delta_{aj_1}^\mu \right) \left( \sum_{j_2=1}^N z_{j_2} \Delta_{bj_2}^\nu \right) \left( \sum_{j_3=1}^N z_{j_3} \Delta_{cj_3}^\rho \right) \\
& \left. + (l^2 + R^2) \left( \sum_{j_1=1}^N z_{j_1} \Delta_{aj_1}^\mu \right) \left( \sum_{j_2=1}^N z_{j_2} \Delta_{bj_2}^\nu \right) \left( \sum_{j_3=1}^N z_{j_3} \Delta_{cj_3}^\rho \right) \left( \sum_{j_4=1}^N z_{j_4} \Delta_{dj_4}^\sigma \right) \right\} . \quad (E.11)
\end{aligned}$$

Pour alléger les notations, on pose :

$$Z_a^\mu \equiv \sum_{j=1}^N z_j \Delta_{aj}^\mu , \quad (\text{E.12})$$

d'où l'on tire :

$$\begin{aligned}
I_1 = & \Gamma(N) \int_0^1 \prod_{i=1}^N dz_i \delta(1 - \sum_{i=1}^N z_i) \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2 - R^2)^N} \\
& \times \left\{ \frac{l^4}{n(n+2)} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) (l^2 + R^2) \mathcal{V}_e^\theta \right. \\
& + \frac{l^4}{n(n+2)} \left[ (g^{\mu\nu} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\rho} + g^{\mu\rho} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\nu} + g^{\nu\rho} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\mu}) Z_d^\sigma \right. \\
& + (g^{\mu\rho} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\sigma} + g^{\mu\sigma} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\rho} + g^{\rho\sigma} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\mu}) Z_b^\nu \\
& + (g^{\mu\nu} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\sigma} + g^{\mu\sigma} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\nu} + g^{\nu\sigma} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\mu}) Z_c^\rho \\
& + (g^{\nu\rho} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\sigma} + g^{\nu\sigma} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\rho} + g^{\rho\sigma} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\mu}) Z_a^\mu \\
& + 2 \sum_{i=1}^N z_i \mathcal{V}_e^\theta \left( (g^{\mu\nu} \Delta_{fi}^\rho + g^{\mu\rho} \Delta_{fi}^\nu + g^{\nu\rho} \Delta_{fi}^\mu) Z_d^\sigma \right. \\
& + (g^{\mu\rho} \Delta_{fi}^\sigma + g^{\mu\sigma} \Delta_{fi}^\rho + g^{\rho\sigma} \Delta_{fi}^\mu) Z_b^\nu \\
& + (g^{\mu\nu} \Delta_{fi}^\sigma + g^{\mu\sigma} \Delta_{fi}^\nu + g^{\nu\sigma} \Delta_{fi}^\mu) Z_c^\rho \\
& \left. \left. + (g^{\nu\rho} \Delta_{fi}^\sigma + g^{\nu\sigma} \Delta_{fi}^\rho + g^{\rho\sigma} \Delta_{fi}^\mu) Z_a^\mu \right) \right] \\
& + \frac{l^2(l^2 + R^2)}{n} \mathcal{V}_e^\theta (g^{\mu\nu} Z_c^\rho Z_d^\sigma + g^{\mu\rho} Z_b^\nu Z_d^\sigma + g^{\mu\sigma} Z_b^\nu Z_c^\rho \\
& + g^{\nu\rho} Z_a^\mu Z_d^\sigma + g^{\nu\sigma} Z_a^\mu Z_c^\rho + g^{\rho\sigma} Z_a^\mu Z_b^\nu) \\
& + \frac{l^2}{n} \left[ \mathcal{T}_{ef}^{\theta\mu} Z_b^\nu Z_c^\rho Z_d^\sigma + \mathcal{T}_{ef}^{\theta\nu} Z_a^\mu Z_c^\rho Z_d^\sigma + \mathcal{T}_{ef}^{\theta\rho} Z_a^\mu Z_b^\nu Z_d^\sigma + \mathcal{T}_{ef}^{\theta\sigma} Z_a^\mu Z_b^\nu Z_c^\rho \right. \\
& \left. + 2 \sum_{i=1}^N z_i \mathcal{V}_e^\theta (\Delta_{fi}^\mu Z_b^\nu Z_c^\rho Z_d^\sigma + \Delta_{fi}^\nu Z_a^\mu Z_c^\rho Z_d^\sigma + \Delta_{fi}^\rho Z_a^\mu Z_b^\nu Z_d^\sigma + \Delta_{fi}^\sigma Z_a^\mu Z_b^\nu Z_c^\rho) \right] \\
& \left. + (l^2 + R^2) Z_a^\mu Z_b^\nu Z_c^\rho Z_d^\sigma \right\} . \quad (\text{E.13})
\end{aligned}$$



On introduit les notations  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\eta$  et  $\xi$ , telles que :

$$I_1 = \Gamma(N) \int_0^1 \prod_{i=1}^N dz_i \delta(1 - \sum_{i=1}^N z_i) \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2 - R^2)^N} \quad (E.14)$$

$$\times \left[ \frac{l^6 \alpha}{n(n+2)} + \frac{l^4 R^2}{n(n+2)} \alpha + \frac{l^4}{n} \left( \frac{\beta}{n+2} + \gamma \right) + \frac{l^2 R^2}{n} \gamma + \frac{l^2}{n} \eta + l^2 \xi + R^2 \xi \right] .$$

On obtient :

$$I_1 = \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} (-1)^N \int_0^1 \prod_{i=1}^N dz_i \delta(1 - \sum_{i=1}^N z_i) \quad (E.15)$$

$$\times \left\{ - \frac{\Gamma(3+n/2) \Gamma(N-3-n/2)}{\Gamma(n/2) n(n+2)} \alpha (R^2 - i\lambda)^{(3-N+n/2)} \right.$$

$$+ \frac{\Gamma(2+n/2) \Gamma(N-2-n/2)}{\Gamma(n/2) n(n+2)} \alpha (R^2 - i\lambda)^{(3-N+n/2)}$$

$$+ \frac{\Gamma(2+n/2) \Gamma(N-2-n/2)}{\Gamma(n/2) n} \left( \frac{\beta}{n+2} + \gamma \right) (R^2 - i\lambda)^{(2-N+n/2)}$$

$$- \frac{\Gamma(1+n/2) \Gamma(N-1-n/2)}{\Gamma(n/2) n} \gamma (R^2 - i\lambda)^{(2-N+n/2)}$$

$$- \frac{\Gamma(1+n/2) \Gamma(N-1-n/2)}{\Gamma(n/2) n} \eta (R^2 - i\lambda)^{(1-N+n/2)}$$

$$\left. + \left( \Gamma(N-n/2) - \frac{\Gamma(1+n/2) \Gamma(N-1-n/2)}{\Gamma(n/2)} \right) \xi (R^2 - i\lambda)^{(1-N+n/2)} \right\}$$

$$= \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} (-1)^N \int_0^1 \prod_{i=1}^N dz_i \delta(1 - \sum_{i=1}^N z_i) \left\{ \frac{1}{\Gamma(n/2) n} \quad (E.16)$$

$$\left[ (\Gamma(2+n/2) \Gamma(N-2-n/2) - \Gamma(3+n/2) \Gamma(N-3-n/2)) \frac{\alpha}{n+2} (R^2 - i\lambda)^{(3-N+n/2)} \right.$$

$$+ (\Gamma(2+n/2) \Gamma(N-2-n/2) \left( \frac{\beta}{n+2} + \gamma \right) - \Gamma(1+n/2) \Gamma(N-1-n/2) \gamma)$$

$$\times \frac{\alpha}{n+2} (R^2 - i\lambda)^{(2-N+n/2)}$$

$$- \Gamma(1+n/2) \Gamma(N-1-n/2) \eta (R^2 - i\lambda)^{(1-N+n/2)} \Big]$$

$$\left. + \left( \Gamma(N-n/2) - \frac{\Gamma(1+n/2) \Gamma(N-1-n/2)}{\Gamma(n/2)} \right) \xi (R^2 - i\lambda)^{(1-N+n/2)} \right\} ,$$

où l'on a utilisé les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(n+2)\Gamma(n/2)} (\Gamma(2+n/2) \Gamma(N-2-n/2) - \Gamma(3+n/2) \Gamma(N-3-n/2)) \\ = \frac{1}{4} (N-5-n) \Gamma(N-3-n/2) , \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

$$\frac{1}{n\Gamma(n/2)} \Gamma(1+n/2) \Gamma(N-1-n/2) = \frac{1}{2} \Gamma(N-1-n/2) , \quad (\text{E.18})$$

$$\Gamma(N-n/2) - \frac{\Gamma(1+n/2) \Gamma(N-1-n/2)}{\Gamma(n/2)} = (N-1-n) \Gamma(N-1-n/2) , \quad (\text{E.19})$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(2+n/2) \Gamma(N-2-n/2)}{\Gamma(n/2) n(n+2)} \beta + \frac{\Gamma(2+n/2) \Gamma(N-2-n/2)}{n\Gamma(n/2)} \gamma \\ - \frac{\Gamma(1+n/2) \Gamma(N-1-n/2)}{n\Gamma(n/2)} \gamma \\ = \Gamma(N-2-n/2) \left( \frac{1}{4} \beta - \frac{1}{2} (N-3-n) \gamma \right) . \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

D'où :

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} (-1)^N \int_0^1 \prod_{i=1}^N dz_i \delta(1 - \sum_{i=1}^N z_i) \\ &\times \left[ \frac{1}{4} (N-5-n) \Gamma(N-3-n/2) \alpha (R^2 - i\lambda)^{(3-N+n/2)} \right. \\ &+ \Gamma(N-2-n/2) \left( \frac{1}{4} \beta - \frac{1}{2} (N-3-n) \gamma \right) (R^2 - i\lambda)^{(2-N+n/2)} \\ &- \frac{1}{2} \Gamma(N-1-n/2) \eta (R^2 - i\lambda)^{(1-N+n/2)} \\ &\left. + (N-1-n) \Gamma(N-1-n/2) \xi (R^2 - i\lambda)^{(1-N+n/2)} \right] . \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

En remplaçant  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\eta$  et  $\xi$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
I_1 = & \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} (-1)^N \int_0^1 \prod_{i=1}^N dz_i \delta(1 - \sum_{i=1}^N z_i) \\
& \times \left\{ \frac{1}{4} (N-5-n) \Gamma(N-3-n/2) (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \mathcal{V}_e^\theta (R^2 - i\lambda)^{(3-N+n/2)} \right. \\
& + \frac{1}{4} \Gamma(N-2-n/2) \left[ (g^{\mu\nu} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\rho} + g^{\mu\rho} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\nu} + g^{\nu\rho} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\mu}) Z_d^\sigma + (g^{\mu\rho} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\sigma} + g^{\mu\sigma} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\rho} + g^{\rho\sigma} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\mu}) Z_b^\nu \right. \\
& + (g^{\mu\nu} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\sigma} + g^{\mu\sigma} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\nu} + g^{\nu\sigma} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\mu}) Z_c^\rho + (g^{\nu\rho} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\sigma} + g^{\nu\sigma} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\rho} + g^{\rho\sigma} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\mu}) Z_a^\mu \\
& + 2\mathcal{V}_e^\theta \left( (g^{\mu\nu} Z_f^\rho + g^{\mu\rho} Z_f^\nu + g^{\nu\rho} Z_f^\mu) Z_d^\sigma + (g^{\mu\rho} Z_f^\sigma + g^{\mu\sigma} Z_f^\rho + g^{\rho\sigma} Z_f^\mu) Z_b^\nu \right. \\
& + (g^{\mu\nu} Z_f^\sigma + g^{\mu\sigma} Z_f^\nu + g^{\nu\sigma} Z_f^\mu) Z_c^\rho + (g^{\nu\rho} Z_f^\sigma + g^{\nu\sigma} Z_f^\rho + g^{\rho\sigma} Z_f^\mu) Z_a^\mu \left. \right] (R^2 - i\lambda)^{(2-N+n/2)} \\
& - \frac{1}{2} (N-3-n) \Gamma(N-2-n/2) \mathcal{V}_e^\theta \left[ g^{\mu\nu} Z_c^\rho Z_d^\sigma + g^{\mu\rho} Z_b^\nu Z_d^\sigma + g^{\mu\sigma} Z_b^\nu Z_c^\rho \right. \\
& + g^{\nu\rho} Z_a^\mu Z_d^\sigma + g^{\nu\sigma} Z_a^\mu Z_c^\rho + g^{\rho\sigma} Z_a^\mu Z_b^\nu \left. \right] (R^2 - i\lambda)^{(2-N+n/2)} \\
& - \frac{1}{2} \Gamma(N-1-n/2) \left[ \mathcal{T}_{ef}^{\theta\mu} Z_b^\nu Z_c^\rho Z_d^\sigma + \mathcal{T}_{ef}^{\theta\nu} Z_a^\mu Z_c^\rho Z_d^\sigma + \mathcal{T}_{ef}^{\theta\rho} Z_a^\mu Z_b^\nu Z_d^\sigma + \mathcal{T}_{ef}^{\theta\sigma} Z_a^\mu Z_b^\nu Z_c^\rho \right. \\
& + 2\mathcal{V}_e^\theta (Z_f^\mu Z_b^\nu Z_c^\rho Z_d^\sigma + Z_f^\nu Z_a^\mu Z_c^\rho Z_d^\sigma + Z_f^\rho Z_a^\mu Z_b^\nu Z_d^\sigma + Z_f^\sigma Z_a^\mu Z_b^\nu Z_c^\rho) \left. \right] (R^2 - i\lambda)^{(1-N+n/2)} \\
& \left. + (N-1-n) \Gamma(N-1-n/2) Z_a^\mu Z_b^\nu Z_c^\rho Z_d^\sigma (R^2 - i\lambda)^{(1-N+n/2)} \right\}.
\end{aligned} \tag{E.22}$$

En substituant les  $Z_i^\mu$  par leurs expressions et en utilisant la notation :

$$J_N^{n+6}(\mathcal{A}_S) = (-1)^N \Gamma(N - \frac{n+6}{2}) \times \int_0^1 \prod_{k=1}^N dz_k \delta(1 - \sum_{j=1}^N z_j) (R^2 - i\lambda)^{(\frac{n+6}{2}-N)} \tag{E.23}$$

$$J_N^{n+4}(z_{i_1}, \dots, z_{i_4}; \mathcal{A}_S) = (-1)^N \Gamma(N - \frac{n+4}{2}) \times \int_0^1 \prod_{k=1}^N dz_k \delta(1 - \sum_{j=1}^N z_j) z_{i_1} \dots z_{i_4} (R^2 - i\lambda)^{(\frac{n+4}{2}-N)} \tag{E.24}$$

$$J_N^{n+2}(z_{i_1}, \dots, z_{i_4}; \mathcal{A}_S) = (-1)^N \Gamma(N - \frac{n+2}{2}) \times \int_0^1 \prod_{k=1}^N dz_k \delta(1 - \sum_{j=1}^N z_j) z_{i_1} \dots z_{i_4} (R^2 - i\lambda)^{(\frac{n+2}{2}-N)} \tag{E.25}$$

$$J_N^n(z_{i_1}, \dots, z_{i_4}; \mathcal{A}_S) = (-1)^N \Gamma(N - \frac{n}{2}) \times \int_0^1 \prod_{k=1}^N dz_k \delta(1 - \sum_{j=1}^N z_j) z_{i_1} \dots z_{i_4} (R^2 - i\lambda)^{(\frac{n}{2}-N)} \tag{E.26}$$

on trouve :

$$\begin{aligned}
I_1 = & \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \left\{ \frac{1}{4} (N - 5 - n) (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \mathcal{V}_e^\theta J_N^{n+6}(\mathcal{A}_S) \right. \\
& + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N J_N^{n+4}(z_i; \mathcal{A}_S) \left[ (g^{\mu\nu} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\rho} + g^{\mu\rho} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\nu} + g^{\nu\rho} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\mu}) \Delta_{di}^\sigma \right. \\
& + (g^{\mu\rho} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\sigma} + g^{\mu\sigma} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\rho} + g^{\rho\sigma} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\mu}) \Delta_{bi}^\nu + (g^{\mu\nu} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\sigma} + g^{\mu\sigma} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\nu} + g^{\nu\sigma} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\mu}) \Delta_{ci}^\rho \\
& + (g^{\nu\rho} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\sigma} + g^{\nu\sigma} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\rho} + g^{\rho\sigma} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\mu}) \Delta_{ai}^\mu \left. \right] \\
& + \frac{1}{2} \mathcal{V}_e^\theta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N J_N^{n+4}(z_i, z_j; \mathcal{A}_S) \left[ (g^{\mu\nu} \Delta_{fj}^\rho + g^{\mu\rho} \Delta_{fj}^\nu + g^{\nu\rho} \Delta_{fj}^\mu) \Delta_{di}^\sigma \right. \\
& + (g^{\mu\rho} \Delta_{fj}^\sigma + g^{\mu\sigma} \Delta_{fj}^\rho + g^{\rho\sigma} \Delta_{fj}^\mu) \Delta_{bi}^\nu + (g^{\mu\nu} \Delta_{fj}^\sigma + g^{\mu\sigma} \Delta_{fj}^\nu + g^{\nu\sigma} \Delta_{fj}^\mu) \Delta_{ci}^\rho \\
& + (g^{\nu\rho} \Delta_{fj}^\sigma + g^{\nu\sigma} \Delta_{fj}^\rho + g^{\rho\sigma} \Delta_{fj}^\mu) \Delta_{ai}^\mu \left. \right] \\
& - \frac{1}{2} (N - 3 - n) \mathcal{V}_e^\theta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N J_N^{n+4}(z_i, z_j; \mathcal{A}_S) \left[ (g^{\mu\nu} \Delta_{cj}^\rho + g^{\mu\rho} \Delta_{bj}^\nu + g^{\nu\rho} \Delta_{aj}^\mu) \Delta_{di}^\sigma \right. \\
& + g^{\mu\sigma} \Delta_{bi}^\nu \Delta_{cj}^\rho + g^{\nu\sigma} \Delta_{ai}^\mu \Delta_{cj}^\rho + g^{\rho\sigma} \Delta_{aj}^\mu \Delta_{bi}^\nu \left. \right] \\
& - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N J_N^{n+2}(z_i, z_j, z_k; \mathcal{A}_S) \left[ \mathcal{T}_{ef}^{\theta\mu} \Delta_{bi}^\nu \Delta_{cj}^\rho \Delta_{dk}^\sigma + \mathcal{T}_{ef}^{\theta\nu} \Delta_{ai}^\mu \Delta_{cj}^\rho \Delta_{dk}^\sigma \right. \\
& + \mathcal{T}_{ef}^{\theta\rho} \Delta_{ai}^\mu \Delta_{bj}^\nu \Delta_{dk}^\sigma + \mathcal{T}_{ef}^{\theta\sigma} \Delta_{ai}^\mu \Delta_{bj}^\nu \Delta_{ck}^\rho \left. \right] \\
& - \mathcal{V}_e^\theta \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N J_N^{n+2}(z_i, z_j, z_k, z_l; \mathcal{A}_S) \left[ \Delta_{fi}^\mu \Delta_{bj}^\nu \Delta_{ck}^\rho \Delta_{dl}^\sigma \right. \\
& + \Delta_{fi}^\nu \Delta_{aj}^\mu \Delta_{ck}^\rho \Delta_{dl}^\sigma + \Delta_{fi}^\rho \Delta_{aj}^\mu \Delta_{bk}^\nu \Delta_{dl}^\sigma + \Delta_{fi}^\sigma \Delta_{aj}^\mu \Delta_{bk}^\nu \Delta_{cl}^\rho \left. \right] \\
& \left. + (N - 1 - n) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N J_N^{n+2}(z_i, z_j, z_k, z_l; \mathcal{A}_S) \Delta_{ai}^\mu \Delta_{bj}^\nu \Delta_{ck}^\rho \Delta_{dl}^\sigma \right\} . \quad (\text{E.27})
\end{aligned}$$

Pour  $N = 5$  :

$$\begin{aligned}
I_1 = & \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \left\{ -\frac{n}{4} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \mathcal{V}_e^\theta J_5^{n+6}(\mathcal{A}_S) \right. \\
& + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 J_5^{n+4}(z_i; \mathcal{A}_S) \left[ (g^{\mu\nu} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\rho} + g^{\mu\rho} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\nu} + g^{\nu\rho} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\mu}) \Delta_{di}^\sigma \right. \\
& + (g^{\mu\rho} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\sigma} + g^{\mu\sigma} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\rho} + g^{\rho\sigma} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\mu}) \Delta_{bi}^\nu + (g^{\mu\nu} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\sigma} + g^{\mu\sigma} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\nu} + g^{\nu\sigma} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\mu}) \Delta_{ci}^\rho \\
& + (g^{\nu\rho} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\sigma} + g^{\nu\sigma} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\rho} + g^{\rho\sigma} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\mu}) \Delta_{ai}^\mu \left. \right] \\
& + \frac{1}{2} \mathcal{V}_e^\theta \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 J_5^{n+4}(z_i, z_j; \mathcal{A}_S) \left[ g^{\mu\nu} (\Delta_{fj}^\rho + (n-2) \Delta_{fj}^\rho) \Delta_{di}^\sigma \right. \\
& + g^{\mu\rho} (\Delta_{fj}^\nu + (n-2) \Delta_{fj}^\nu) \Delta_{di}^\sigma + g^{\nu\rho} (\Delta_{fj}^\mu + (n-2) \Delta_{fj}^\mu) \Delta_{di}^\sigma \\
& + g^{\mu\sigma} (\Delta_{fj}^\rho + (n-2) \Delta_{fj}^\rho) \Delta_{bi}^\nu + g^{\nu\sigma} (\Delta_{fj}^\rho + (n-2) \Delta_{fj}^\rho) \Delta_{ci}^\mu \\
& + g^{\rho\sigma} (\Delta_{fj}^\mu + (n-2) \Delta_{fj}^\mu) \Delta_{bi}^\nu + g^{\mu\rho} \Delta_{fj}^\sigma \Delta_{bi}^\nu \\
& + (g^{\nu\rho} \Delta_{fj}^\sigma + g^{\rho\sigma} \Delta_{fj}^\nu) \Delta_{ai}^\mu + (g^{\mu\nu} \Delta_{fj}^\sigma + g^{\mu\sigma} \Delta_{fj}^\nu + g^{\nu\sigma} \Delta_{fj}^\mu) \Delta_{ci}^\rho \left. \right] \\
& - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 J_5^{n+2}(z_i, z_j, z_k; \mathcal{A}_S) \left[ \mathcal{T}_{ef}^{\theta\mu} \Delta_{bi}^\nu \Delta_{cj}^\rho \Delta_{dk}^\sigma + \mathcal{T}_{ef}^{\theta\nu} \Delta_{ai}^\mu \Delta_{cj}^\rho \Delta_{dk}^\sigma \right. \\
& + \mathcal{T}_{ef}^{\theta\rho} \Delta_{ai}^\mu \Delta_{bj}^\nu \Delta_{dk}^\sigma + \mathcal{T}_{ef}^{\theta\sigma} \Delta_{ai}^\mu \Delta_{bj}^\nu \Delta_{ck}^\rho \left. \right] \\
& - \mathcal{V}_e^\theta \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 \sum_{l=1}^5 J_5^{n+2}(z_i, z_j, z_k, z_l; \mathcal{A}_S) \\
& \left[ \Delta_{fi}^\mu \Delta_{bj}^\nu \Delta_{ck}^\rho \Delta_{dl}^\sigma + \Delta_{fi}^\nu \Delta_{aj}^\mu \Delta_{ck}^\rho \Delta_{dl}^\sigma + \Delta_{fi}^\rho \Delta_{aj}^\mu \Delta_{bk}^\nu \Delta_{dl}^\sigma + \Delta_{fi}^\sigma \Delta_{aj}^\mu \Delta_{bk}^\nu \Delta_{cl}^\rho \right] \\
& + (4-n) \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 \sum_{l=1}^5 J_5^{n+2}(z_i, z_j, z_k, z_l; \mathcal{A}_S) \Delta_{ai}^\mu \Delta_{bj}^\nu \Delta_{ck}^\rho \Delta_{dl}^\sigma \left. \right\}. \quad (\text{E.28})
\end{aligned}$$

On pose  $n = 4 - 2\epsilon_{uv}$  :

$$\begin{aligned}
I_1 = & \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \left\{ \left( \frac{\epsilon_{uv}}{2} - 1 \right) (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \mathcal{V}_e^\theta J_5^{n+6}(\mathcal{A}_S) \right. \\
& + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 J_5^{n+4}(z_i; \mathcal{A}_S) \left[ (g^{\mu\nu} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\rho} + g^{\mu\rho} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\nu} + g^{\nu\rho} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\mu}) \Delta_{di}^\sigma \right. \\
& + (g^{\mu\rho} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\sigma} + g^{\mu\sigma} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\rho} + g^{\rho\sigma} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\mu}) \Delta_{bi}^\nu + (g^{\mu\nu} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\sigma} + g^{\mu\sigma} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\nu} + g^{\nu\sigma} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\mu}) \Delta_{ci}^\rho \\
& + (g^{\nu\rho} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\sigma} + g^{\nu\sigma} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\rho} + g^{\rho\sigma} \mathcal{T}_{ef}^{\theta\nu}) \Delta_{ai}^\mu \left. \right] \\
& + \frac{1}{2} \mathcal{V}_e^\theta \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 J_5^{n+4}(z_i, z_j; \mathcal{A}_S) \left[ g^{\mu\nu} (\Delta_{fj}^\rho + 2\Delta_{fj}^\sigma) \Delta_{di}^\sigma \right. \\
& + g^{\mu\rho} (\Delta_{fj}^\nu + 2\Delta_{bj}^\nu) \Delta_{di}^\sigma + g^{\nu\rho} (\Delta_{fj}^\mu + 2\Delta_{aj}^\mu) \Delta_{di}^\sigma \\
& + g^{\mu\sigma} (\Delta_{fj}^\rho + 2\Delta_{cj}^\rho) \Delta_{bi}^\nu + g^{\nu\sigma} (\Delta_{fj}^\rho + 2\Delta_{cj}^\rho) \Delta_{ai}^\mu \\
& + g^{\rho\sigma} (\Delta_{fj}^\mu + 2\Delta_{aj}^\mu) \Delta_{bi}^\nu + g^{\mu\rho} \Delta_{fj}^\sigma \Delta_{bi}^\nu \\
& + (g^{\nu\rho} \Delta_{fj}^\sigma + g^{\rho\sigma} \Delta_{fj}^\nu) \Delta_{ai}^\mu + (g^{\mu\nu} \Delta_{fj}^\sigma + g^{\mu\sigma} \Delta_{fj}^\nu + g^{\nu\sigma} \Delta_{fj}^\mu) \Delta_{ci}^\rho \left. \right] \\
& - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 J_5^{n+2}(z_i, z_j, z_k; \mathcal{A}_S) \left[ \mathcal{T}_{ef}^{\theta\mu} \Delta_{bi}^\nu \Delta_{cj}^\rho \Delta_{dk}^\sigma \right. \\
& + \mathcal{T}_{ef}^{\theta\nu} \Delta_{ai}^\mu \Delta_{cj}^\rho \Delta_{dk}^\sigma + \mathcal{T}_{ef}^{\theta\rho} \Delta_{ai}^\mu \Delta_{bj}^\nu \Delta_{dk}^\sigma \\
& + \mathcal{T}_{ef}^{\theta\sigma} \Delta_{ai}^\mu \Delta_{bj}^\nu \Delta_{ck}^\rho \left. \right] - \mathcal{V}_e^\theta \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 \sum_{l=1}^5 J_5^{n+2}(z_i, z_j, z_k, z_l; \mathcal{A}_S) \\
& \times \left[ \Delta_{fi}^\mu \Delta_{bj}^\nu \Delta_{ck}^\rho \Delta_{dl}^\sigma + \Delta_{fi}^\nu \Delta_{aj}^\mu \Delta_{ck}^\rho \Delta_{dl}^\sigma + \Delta_{fi}^\rho \Delta_{aj}^\mu \Delta_{bk}^\nu \Delta_{dl}^\sigma \right. \\
& + \Delta_{fi}^\sigma \Delta_{aj}^\mu \Delta_{bk}^\nu \Delta_{cl}^\rho \left. \right] + 0 \left. \right\} . \tag{E.29}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
I_1 = & \frac{i}{(4\pi)^{n/2}} \left[ \left( \frac{\epsilon_{uv}}{2} - 1 \right) (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \mathcal{V}_e^\theta J_5^{n+6}(\mathcal{A}_S) \right] \\
& + \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 J_5^{n+4}(z_i; \mathcal{A}_S) \left[ g^{\mu\nu} (\mathcal{T}_{ef}^{\theta\rho} \Delta_{di}^\sigma + t a u_{ef}^{\theta\sigma} \Delta_{ci}^\rho) + g^{\mu\rho} (\mathcal{T}_{ef}^{\theta\nu} \Delta_{di}^\sigma + \mathcal{T}_{ef}^{\theta\sigma} \Delta_{bi}^\nu) \right. \right. \\
& + g^{\mu\sigma} (\mathcal{T}_{ef}^{\theta\nu} \Delta_{ci}^\rho + \mathcal{T}_{ef}^{\theta\rho} \Delta_{bi}^\nu) + g^{\nu\rho} (\mathcal{T}_{ef}^{\theta\mu} \Delta_{di}^\sigma + \mathcal{T}_{ef}^{\theta\sigma} \Delta_{ai}^\mu) \\
& + g^{\nu\sigma} (\mathcal{T}_{ef}^{\theta\mu} \Delta_{ci}^\rho + \mathcal{T}_{ef}^{\theta\rho} \Delta_{ai}^\mu) + g^{\rho\sigma} (\mathcal{T}_{ef}^{\theta\mu} \Delta_{bi}^\nu + \mathcal{T}_{ef}^{\theta\nu} \Delta_{ai}^\mu) \left. \right] \\
& + \frac{1}{2} \mathcal{V}_e^\theta \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 J_5^{n+4}(z_i, z_j; \mathcal{A}_S) \left[ g^{\mu\nu} (\Delta_{fj}^\rho \Delta_{di}^\sigma + 2\Delta_{fj}^\rho \Delta_{di}^\sigma + \Delta_{fj}^\sigma \Delta_{ci}^\rho) \right. \\
& + g^{\mu\rho} (\Delta_{fj}^\nu \Delta_{di}^\sigma + 2\Delta_{bj}^\nu \Delta_{di}^\sigma + \Delta_{fj}^\sigma \Delta_{bi}^\nu) + g^{\mu\sigma} (\Delta_{fj}^\rho \Delta_{bi}^\nu + 2\Delta_{cj}^\rho \Delta_{bi}^\nu + g^{\mu\sigma} \Delta_{fj}^\nu \Delta_{ci}^\rho) \\
& + g^{\nu\rho} (\Delta_{fj}^\mu \Delta_{di}^\sigma + 2\Delta_{aj}^\mu \Delta_{di}^\sigma + \Delta_{fj}^\sigma \Delta_{ai}^\mu) + g^{\nu\sigma} (\Delta_{fj}^\rho \Delta_{ai}^\mu + 2\Delta_{cj}^\rho \Delta_{ai}^\mu + \Delta_{fj}^\mu \Delta_{ci}^\rho) \\
& + g^{\rho\sigma} (\Delta_{fj}^\mu \Delta_{bi}^\nu + 2\Delta_{aj}^\mu \Delta_{bi}^\nu + \Delta_{fj}^\nu \Delta_{ai}^\mu) \left. \right] \\
& - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 J_5^{n+2}(z_i, z_j, z_k; \mathcal{A}_S) \left[ \mathcal{T}_{ef}^{\theta\mu} \Delta_{bi}^\nu \Delta_{cj}^\rho \Delta_{dk}^\sigma + \mathcal{T}_{ef}^{\theta\nu} \Delta_{ai}^\mu \Delta_{cj}^\rho \Delta_{dk}^\sigma \right. \\
& + \mathcal{T}_{ef}^{\theta\rho} \Delta_{ai}^\mu \Delta_{bj}^\nu \Delta_{dk}^\sigma + \mathcal{T}_{ef}^{\theta\sigma} \Delta_{ai}^\mu \Delta_{bj}^\nu \Delta_{ck}^\rho \left. \right] \\
& - \mathcal{V}_e^\theta \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 \sum_{l=1}^5 J_5^{n+2}(z_i, z_j, z_k, z_l; \mathcal{A}_S) \left[ \Delta_{fi}^\mu \Delta_{bj}^\nu \Delta_{ck}^\rho \Delta_{dl}^\sigma \right. \\
& + \Delta_{fi}^\nu \Delta_{aj}^\mu \Delta_{ck}^\rho \Delta_{dl}^\sigma + \Delta_{fi}^\rho \Delta_{aj}^\mu \Delta_{bk}^\nu \Delta_{dl}^\sigma + \Delta_{fi}^\sigma \Delta_{aj}^\mu \Delta_{bk}^\nu \Delta_{cl}^\rho \left. \right] \left. \right\} . \tag{E.30}
\end{aligned}$$

L'intégrale  $L_5$  est définie par :

$$L_5(\mathcal{A}_S) \equiv \int_0^1 \prod_{i=1}^5 dz_i \delta(1 - \sum_{i=1}^5 z_i) \ln(R^2) . \tag{E.31}$$

Or :

$$\begin{aligned}
J_5^{n+6}(\mathcal{A}_S) &= -\Gamma(2 - n/2) \int_0^1 \prod_{i=1}^5 dz_i \delta(1 - \sum_{i=1}^5 z_i) (R^2)^{(n/2-2)} \\
&= -\frac{\Gamma(1 + \epsilon_{uv})}{\epsilon_{uv}} \int_0^1 \prod_{i=1}^5 dz_i \delta(1 - \sum_{i=1}^5 z_i) (R^2)^{-\epsilon_{uv}} \\
&= -\frac{\Gamma(1 + \epsilon_{uv})}{\epsilon_{uv}} \int_0^1 \prod_{i=1}^5 dz_i \delta(1 - \sum_{i=1}^5 z_i) + \Gamma(1 + \epsilon_{uv}) \int_0^1 \prod_{i=1}^5 dz_i \delta(1 - \sum_{i=1}^5 z_i) \ln(R^2) \\
&= -\frac{\Gamma(1 + \epsilon_{uv})}{\epsilon_{uv} \Gamma(5)} + \int_0^1 \prod_{i=1}^5 dz_i \delta(1 - \sum_{i=1}^5 z_i) \ln(R^2) . \tag{E.32}
\end{aligned}$$

D'où :

$$J_5^{n+6}(\mathcal{A}_S) = -\frac{\Gamma(1+\epsilon_{uv})}{\epsilon_{uv}\Gamma(5)} + L_5(\mathcal{A}_S) . \quad (\text{E.33})$$

L'indice  $f$  est arbitraire, on peut donc le choisir tel que  $f = a$  quand l'indice du haut est  $\mu$ ,  $f = b$  quand l'indice du haut est  $\nu$ ,  $f = c$  quand l'indice du haut est  $\rho$  et  $f = d$  quand l'indice du haut est  $\sigma$ . On trouve alors :

$$\begin{aligned} I_1 = & \frac{-i}{(4\pi)^{n/2}} \left[ \left( -\frac{1}{24} \frac{\Gamma(1+\epsilon_{uv})}{\epsilon_{uv}} + L_5(\mathcal{A}_S) + \frac{1}{48} \right) (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \mathcal{V}_e^\theta \right] \\ & + \frac{i}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 J_5^{n+4}(z_i; \mathcal{A}_S) \left[ g^{\mu\nu} (\mathcal{T}_{ec}^{\theta\rho} \Delta_{di}^\sigma + \mathcal{T}_{ed}^{\theta\sigma} \Delta_{ci}^\rho) + g^{\mu\rho} (\mathcal{T}_{eb}^{\theta\nu} \Delta_{di}^\sigma + \mathcal{T}_{ed}^{\theta\sigma} \Delta_{bi}^\nu) \right. \right. \\ & + g^{\mu\sigma} (\mathcal{T}_{eb}^{\theta\nu} \Delta_{ci}^\rho + \mathcal{T}_{ec}^{\theta\rho} \Delta_{bi}^\nu) + g^{\nu\rho} (\mathcal{T}_{ea}^{\theta\mu} \Delta_{di}^\sigma + \mathcal{T}_{ed}^{\theta\sigma} \Delta_{ai}^\mu) \\ & + g^{\nu\sigma} (\mathcal{T}_{ea}^{\theta\mu} \Delta_{ci}^\rho + \mathcal{T}_{ec}^{\theta\rho} \Delta_{ai}^\mu) + g^{\rho\sigma} (\mathcal{T}_{ea}^{\theta\mu} \Delta_{bi}^\nu + \mathcal{T}_{eb}^{\theta\nu} \Delta_{ai}^\mu) \left. \right] \\ & + 2\mathcal{V}_e^\theta \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 J_5^{n+4}(z_i, z_j; \mathcal{A}_S) \left[ g^{\mu\nu} \Delta_{cj}^\rho \Delta_{di}^\sigma + g^{\mu\rho} \Delta_{bj}^\nu \Delta_{di}^\sigma + g^{\mu\sigma} \Delta_{cj}^\rho \Delta_{bi}^\nu \right. \\ & + g^{\nu\rho} \Delta_{aj}^\mu \Delta_{di}^\sigma + g^{\nu\sigma} \Delta_{cj}^\rho \Delta_{ai}^\mu + g^{\rho\sigma} \Delta_{aj}^\mu \Delta_{bi}^\nu \left. \right] \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 J_5^{n+2}(z_i, z_j, z_k; \mathcal{A}_S) \left[ \mathcal{T}_{ea}^{\theta\mu} \Delta_{bi}^\nu \Delta_{cj}^\rho \Delta_{dk}^\sigma + \mathcal{T}_{eb}^{\theta\nu} \Delta_{ai}^\mu \Delta_{cj}^\rho \Delta_{dk}^\sigma \right. \\ & + \mathcal{T}_{ec}^{\theta\rho} \Delta_{ai}^\mu \Delta_{bj}^\nu \Delta_{dk}^\sigma + \mathcal{T}_{ed}^{\theta\sigma} \Delta_{ai}^\mu \Delta_{bj}^\nu \Delta_{ck}^\rho \left. \right] \\ & \left. - \mathcal{V}_e^\theta \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^5 \sum_{l=1}^5 J_5^{n+2}(z_i, z_j, z_k, z_l; \mathcal{A}_S) \left( 4 \Delta_{ai}^\mu \Delta_{bj}^\nu \Delta_{ck}^\rho \Delta_{dl}^\sigma \right) \right\} . \quad (\text{E.34}) \end{aligned}$$



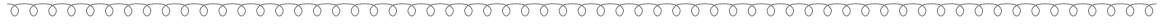


---

## Annexe F

# Towards automated one-loop calculations for multi-particle processes (article)

---



## Towards automated one-loop calculations for multi-particle processes

T. Binoth<sup>a</sup>, J.Ph. Guillet<sup>b</sup>, G. Heinrich<sup>c</sup>, N. Kauer<sup>d</sup>, F. Mahmoudi<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Universität Würzburg*

<sup>b</sup>*LAPTH Annecy*

<sup>c</sup>*Universität Hamburg*

<sup>d</sup>*RWTH Aachen*

### Abstract

Collider experiments in the TeV range demand precise predictions for signal and background reactions. We develop algebraic/numerical methods to describe multi-particle/jet production at the loop-level. Explicitly we discuss the analytic calculation of the 3-gluon 2-photon 1-loop amplitude. We also discuss numerical methods to tackle the calculation of 1-loop 6-point functions. Methods to calculate one-loop multi-leg amplitudes will be described; analytical ones for the massless case as well as numerical ones, the latter being applicable to amplitudes involving massive and massless particles.

## 1 Introduction

In this decade experiments at hadron colliders explore the TeV scale. The large center of mass energies lead generically to multi-particle final states created by QCD initial states. The application of perturbative methods is justified if the scales of the problem are considerably larger than the proton mass. Then a systematic separation of long and short distance effects is possible and predictions for cross sections can be made at the loop level, which is mandatory for a reliable estimate of production rates especially at hadron colliders. The calculation of multi-particle production at the one-loop level is very challenging due to the combinatorial complexity of the Feynman diagrammatic approach. Although the calculation of partonic  $2 \rightarrow 2$  amplitudes at one-loop is meanwhile standard, already the number of known  $2 \rightarrow 3$  1-loop amplitudes is very restricted. Up to now not a single Standard Model process which has generic  $2 \rightarrow 4$  kinematics is computed at the one-loop level. Needless to say this is highly relevant to many search channels for the Higgs boson at the LHC, like gluon fusion and weak boson fusion, where additional jets have to be tagged to improve the signal to background ratio. For signal reactions like  $PP \rightarrow H + 0, 1, 2$  jets, with  $H \rightarrow \gamma\gamma, WW^*, \tau^+\tau^-$  which are available at one-loop level, not all amplitude calculations for the background exist. This is due to the fact that the signal case typically contains only 5-point functions at 1-loop, whereas the background has generic  $2 \rightarrow 4$  kinematics. As an example for such reactions consider  $PP \rightarrow b\bar{b}b\bar{b} + X$ ,  $PP \rightarrow \gamma\gamma + 2$  jets +  $X$  or  $PP \rightarrow ZZ + \gamma\gamma + X$ . These require the evaluation of hexagon graphs like

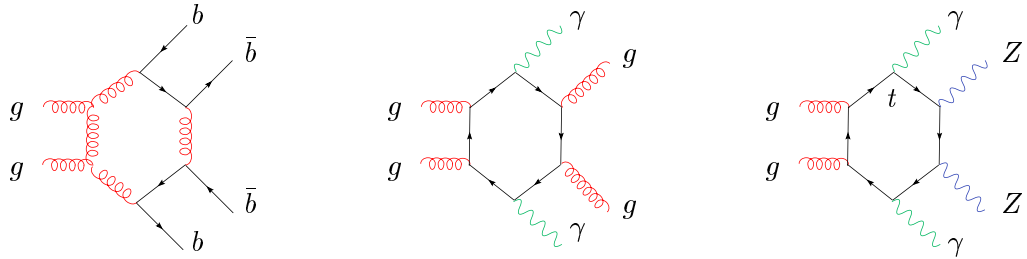


FIG. F.1 – Hexagon graphs for multi-particle production. The  $t$  in the right graph indicates that the fermion is a top quark.

The aim of our working group is to develop methods for the calculation of such hexagon amplitudes. The final goal is a tool to tackle the computation of general  $2 \rightarrow 4$  processes at the one-loop level in a completely automated way. A basic ingredient of such a tool are algebraic reduction formulas. Our reduction formalism is described in the next section. As an example for the efficiency of our methods we discuss the 5-point 1-loop amplitude  $gg \rightarrow \gamma\gamma g$  in Section 3. The fully analytical treatment of hexagon one-loop amplitudes seems to be feasible analogously, if massless particles are considered. Examples of hexagon amplitudes in the Yukawa model calculated with our approach can be found in [1, 2]. Other,

phenomenologically relevant examples are presently under study. For the massive case we suggest a numerical evaluation described in Section 4.

## 2 Reduction Formalism

We will very briefly discuss the basic reduction formulas for  $N$ -point scalar and tensor integrals. More details can be found in [3, 4].

### 2.1 Tensor reduction

Feynman diagrams correspond to combinations of tensor integrals. The momentum space representation of an  $N$ -point tensor integral of rank  $R$  in  $D = 4 - 2\epsilon$  dimensions is given by

$$I_N^{\mu_1 \dots \mu_R} = \int \frac{d^D k}{i\pi^{D/2}} \frac{k^{\mu_1} \dots k^{\mu_R}}{\prod_{j=1}^N (q_j^2 - m_j^2)} \quad (\text{F.1})$$

Here  $q_j$  is a linear combination of the loop momentum  $k$  and external momenta  $p_1, \dots, p_N$ . If  $N \geq 5$  standard reduction methods lead to a proliferation of terms with complicated denominators. This has to be avoided, as otherwise a stable numerical evaluation of the amplitude is hardly possible. By using helicity or projection methods loop momenta can always be combined with external momenta such that they are expressed by combinations of inverse propagators, e.g. with  $s_j = p_j^2$ ,  $s_{ij} = (p_i + p_j)^2$ ,  $q_1 = k - p_1$  and  $q_2 = k - p_1 - p_2$ :

$$2k \cdot p_2 = (q_1^2 - m_1^2) - (q_2^2 - m_2^2) + (s_{12} - m_2^2) - (s_1 - m_1^2) \quad (\text{F.2})$$

After expressing products of loop momenta with external vectors by propagators and canceling as many propagators as possible, one is left with tensor integrals which are irreducible. One finds that at most rank 1  $N$ -point integrals have to be reduced for an  $N$ -point problem. Explicit representations for the irreducible tensor integrals can be found in [4]. After complete tensor reduction one is left with a linear combination of scalar integrals.

### 2.2 Scalar reduction

To achieve as many analytic cancellations as possible the amplitude has to be expressed by a basis of scalar integrals. To this end scalar  $N$ -point integrals have to be reduced further. The scalar  $N$ -point function in momentum and Feynman parameter space is given by

$$I_N^D = \int \frac{d^D k}{i\pi^{D/2}} \frac{1}{\prod_{j=1}^N (q_j^2 - m_j^2)} = (-1)^N \Gamma(N - D/2) \int_0^1 d^N z \frac{\delta(1 - \sum_{j=1}^N z_j)}{\sum_{i,j=1}^N S_{ij} z_i z_j / 2} \quad (\text{F.3})$$

where  $S_{ij} = G_{ij} - G_{ii}/2 - G_{jj}/2 + m_i^2 + m_j^2$ ,  $G_{ij} = 2 r_i \cdot r_j$ ,  $r_j = p_1 + \dots + p_j$ . The basic

reduction formula relates an  $N$ -point scalar integral to  $(N-1)$ -point scalar integrals  $I_{N-1,j}^D$ , where the  $j$ th propagator is omitted, and  $(D+2)$ -dimensional remainder terms :

$$I_N^D = \sum_{j=1}^N b_j I_{N-1,j}^D + \begin{cases} -(1+2\epsilon) \frac{\det(G)}{\det(S)} I_N^{D+2} & N=4 \\ \mathcal{O}(\epsilon) & N=5 \\ 0 & N \geq 6 \end{cases} \quad (\text{F.4})$$

The reduction coefficients are  $b_j = -\sum_{l=1}^N S_{jl}^{-1}$ . One finds by iteration that each  $N$ -point function and therefore each amplitude can be expressed by 2- and 3-point functions in  $D$  dimensions and 4-point functions in  $D+2$  dimensions only. These form the basic building blocks for an irreducible representation of the amplitude in terms of scalar functions. The coefficients of these scalar integrals are expected to simplify to a large extent.

### 3 Analytic Calculation of $gg \rightarrow \gamma\gamma g$

To give an example for our algebraic approach to  $N$ -point amplitudes we have reconsidered the 5-point 1-loop amplitude  $gg \rightarrow \gamma\gamma g$ . While this amplitude only had been extracted indirectly from the 5-gluon amplitude [5] by replacing gluons by photons until recently, we present a direct calculation [6]. For convenience we define all particles as incoming.

$$\gamma(p_1, \lambda_1) + \gamma(p_2, \lambda_2) + g(p_3, \lambda_3, c_3) + g(p_4, \lambda_4, c_4) + g(p_5, \lambda_5, c_5) \rightarrow 0 \quad (\text{F.5})$$

Out-states can be obtained by crossing rules. In hadronic collisions this amplitude is relevant for the production of photon pairs in association with a jet and as such a contribution of the background to the Higgs boson search channel  $H \rightarrow \gamma\gamma + \text{jet}$ . A phenomenological analysis has already been provided in [7, 8]. The colour structure of this amplitude is simple. It can be written as

$$\Gamma^{\{\lambda_j\}, \{c_j\}}[\gamma\gamma ggg \rightarrow 0] = \frac{Q_q^2 g_s^3}{i\pi^2} f^{c_3 c_4 c_5} \mathcal{A}^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5} \quad (\text{F.6})$$

$\mathcal{A}^{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 \lambda_5}$  are helicity dependent linear combinations of scalar integrals and a constant term which is a remnant of two-point functions with coefficients of order  $(D-4)$ . Six independent helicity components exist :  $++++$ ,  $++++-$ ,  $-++++$ ,  $--+++$ ,  $+++--$ ,  $-+++-$ . As the amplitude is finite one expects that all 3-point functions which carry spurious infrared poles cancel. The function basis of the problem is thus reduced to 2-point functions  $I_2^D(s_{ij}) = \frac{\Gamma(1+\epsilon)\Gamma(1-\epsilon)^2}{\Gamma(2-2\epsilon)} \frac{(-s_{ij})^{-\epsilon}}{\epsilon}$ , 4-point functions in  $D+2$  dimensions written

as [2]

$$F_1(s_{j_1 j_2}, s_{j_2 j_3}, s_{j_4 j_5}) = \frac{1}{s_{j_4 j_5} - s_{j_1 j_2} - s_{j_2 j_3}} I_4^6(p_{j_1}, p_{j_2}, p_{j_3}, p_{j_4} + p_{j_5}) \quad (\text{F.7})$$

and constant terms. From unitarity one expects that the  $++++, ++++-, -++++$  amplitudes should be polynomial. The other helicity amplitudes will also contain non-polynomial functions like logarithms and dilogarithms contained in  $I_2^D$  and  $F_1$ . To give an example of each case we show here the results for  $\mathcal{A}^{++++}$  and  $\mathcal{A}^{--++}$  only, the remaining ones which have also compact representations can be found in [6]. The result is expressed in terms of field strength tensors  $\mathcal{F}_j^{\mu\nu} = p_j^\mu \epsilon_j^\nu - p_j^\nu \epsilon_j^\mu$  which satisfy the relations

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathcal{F}_i^\pm \mathcal{F}_j^\pm) &= 2 p_i \cdot \epsilon_j^\pm p_j \cdot \epsilon_i^\pm - s_{ij} \epsilon_i^\pm \cdot \epsilon_j^\pm \\ p_i \cdot \mathcal{F}_j^\pm \cdot p_k &= (s_{ij} p_k \cdot \epsilon_j^\pm - s_{jk} p_i \cdot \epsilon_j^\pm)/2 \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

where  $\epsilon_j^\pm$  are the polarization vectors of the gluons and photons. For  $\mathcal{A}^{++++}$  which is polynomial we find the following result

$$\mathcal{A}^{++++} = \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_1^+ \mathcal{F}_2^+) \text{Tr}(\mathcal{F}_3^+ \mathcal{F}_4^+)}{s_{12}^2 s_{34}^2} \left[ C^{++++} p_1 \cdot \mathcal{F}_5^- \cdot p_3 - (3 \leftrightarrow 4) \right] \quad (\text{F.9})$$

The coefficient is given by

$$\begin{aligned} C^{++++} &= -\frac{s_{45} s_{13} s_{14}}{s_{35} s_{15} s_{24}} - \frac{s_{13} s_{45}}{s_{15} s_{35}} + \frac{s_{45}^2}{s_{15} s_{24}} - \frac{s_{12}^2 + s_{45}^2 - s_{12} s_{45}}{s_{35} s_{15}} + \frac{s_{13} s_{15}}{s_{23} s_{45}} + \frac{s_{13} - s_{34}}{s_{23}} \\ &\quad - \frac{s_{34} s_{45}}{s_{23} s_{15}} + \frac{s_{15} - s_{25}}{s_{45}} - \frac{s_{23} + s_{35}}{s_{13}} - \frac{s_{23} s_{25}}{s_{13} s_{45}} + \frac{s_{34} + s_{12}}{s_{15}} \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

We have checked that the corresponding amplitude has a  $S_2 \otimes S_2$  Bose symmetry when the photons and the gluons with equal helicities are interchanged. For  $\mathcal{A}^{--++}$  we split the result into three pieces with indices  $F, B, 1$ , which belong to the part proportional to 6-dimensional boxes  $F_1$ , a part containing bubble graphs  $I_2^D$ , and a constant term, respectively.

$$\mathcal{A}^{--++} = \mathcal{A}_F^{--++} + \mathcal{A}_B^{--++} + \mathcal{A}_1^{--++} \quad (\text{F.11})$$

We find

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_F^{-++++} &= \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_1^- \mathcal{F}_2^-) \text{Tr}(\mathcal{F}_3^+ \mathcal{F}_4^+)}{s_{12}^2 s_{34}^2} \left[ C_F^{-++++} p_1 \cdot \mathcal{F}_5^+ \cdot p_3 - (3 \leftrightarrow 4) \right] F_1(s_{13}, s_{14}, s_{25}) \\ &\quad - (4 \leftrightarrow 5) - (5 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 2) - (1 \leftrightarrow 2, 4 \leftrightarrow 5) - (1 \leftrightarrow 2, 5 \leftrightarrow 3) \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_B^{-++++} &= \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_1^- \mathcal{F}_2^-) \text{Tr}(\mathcal{F}_3^+ \mathcal{F}_4^+)}{s_{12}^2 s_{34}^2} \left[ C_B^{-++++} p_1 \cdot \mathcal{F}_5^+ \cdot p_3 - (3 \leftrightarrow 4) \right] I_2^D(s_{15}) \\ &\quad - (4 \leftrightarrow 5) - (5 \leftrightarrow 3) + (1 \leftrightarrow 2) - (1 \leftrightarrow 2, 4 \leftrightarrow 5) - (1 \leftrightarrow 2, 5 \leftrightarrow 3) \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

$$\mathcal{A}_1^{-++++} = \frac{\text{Tr}(\mathcal{F}_1^- \mathcal{F}_2^-) \text{Tr}(\mathcal{F}_3^+ \mathcal{F}_4^+ \mathcal{F}_5^+)}{2 s_{34} s_{45} s_{35}} \quad (\text{F.14})$$

The indicated permutations have to be applied to the indices of the field strength tensors, momenta and Mandelstam variables. The coefficients are

$$C_F^{-++++} = \frac{1}{2} \frac{s_{12}^2 - 2s_{13}s_{14}}{s_{35}s_{15}} - \frac{s_{14}}{s_{34}} - \frac{s_{14}}{s_{35}} \quad (\text{F.15})$$

$$\begin{aligned} C_B^{-++++} &= \frac{s_{45}}{s_{15}} \left[ \frac{s_{13} + s_{35}}{s_{14} + s_{45}} + \frac{s_{14} + s_{45}}{s_{13} + s_{35}} \right] + \frac{s_{45}^2 s_{13}}{s_{15} s_{35}^2} + \frac{s_{14} s_{35}}{s_{15} s_{45}} + 2 \frac{(s_{15} + s_{45})^2}{s_{35}^2} \\ &\quad - \frac{s_{13} + s_{35}}{s_{15}} - \frac{s_{14} s_{45}}{s_{15} s_{35}} - \frac{s_{45}^2}{s_{35} s_{15}} + \frac{s_{14} + s_{24}}{s_{45}} + \frac{s_{12} - s_{14} - s_{35}}{s_{14} + s_{45}} + 2 \frac{s_{14}(s_{15} + s_{45})}{s_{35}^2} \\ &\quad + \frac{s_{23}^2 s_{15}}{s_{35}^2 (s_{13} + s_{35})} + \frac{2s_{45} + s_{15}}{s_{13} + s_{35}} - 2 \frac{(s_{15} + s_{45}) s_{23}}{s_{35} (s_{13} + s_{35})} - \frac{(2s_{45} + s_{15})}{s_{35}} + \frac{s_{13}(2s_{45} + s_{15})}{s_{35}^2} \end{aligned}$$

In the given expressions the  $S_2 \otimes S_3$  symmetry under exchange of the two photons and the three gluons is manifest after taking into account the omitted colour factor. The result indicates that with our approach indeed a compact representation of complicated loop amplitudes can be obtained. The application of our approach to relevant 6-point amplitudes is presently under study.

## 4 Numerical Evaluation of Multi-Leg Integrals

As already mentioned, our final aim is a complete automatization of one-loop calculations. The bottleneck for this goal is mainly given by the calculation of the virtual amplitudes : As the number of external legs increases, the growing number of invariants renders the analytical expressions more and more complicated. If in addition massive particles are involved, the complexity of the resulting expressions rapidly approaches a limit where the analytical



---

evaluation of the amplitude becomes unfeasible. Therefore, a numerical approach seems to be more appropriate to tackle different types of one-loop amplitudes in a unified and efficient way. Of course, it has to be stated what "numerical" means, as any method should finally lead to "numbers" to be compared to data. The important question is at what stage of the calculation the transition from analytical to numerical evaluation should be made. The conventional approach to calculate NLO cross sections seeks to keep analytical expressions in the course of the calculation of a cross section as far as possible. Of course, there are good reasons to do so : If infrared (and/or ultraviolet) poles are present, they have to be isolated and canceled before any numerical evaluation can be attempted. Further, analytic expressions are flexible in the sense that they can be used in "crossed" processes with different kinematics by analytic continuation. On the other hand, the analytical approach may be troublesome if the calculation of differential cross sections  $d\sigma/d\mathcal{O}$  for some (infrared safe) observable  $\mathcal{O}$  and/or the implementation of experimental cuts requires modifications of the analytic expressions. In addition, concerning the virtual integrals, it is well known that even if a closed form exists, the implementation into a Monte Carlo program may lead to numerical instabilities because the expressions are not appropriate for every phase space region. These drawbacks of the "maximally analytical" approach suggest to make the transition analytical  $\rightarrow$  numerical at an earlier stage of the calculation. A completely numerical approach has been suggested by D. Soper [9,10], where the sum over cuts for a given graph is performed *before* the numerical integration over the loop momenta, in this way exploiting unitarity to cancel soft and collinear divergences. This method is very elegant, but choosing appropriate integration contours in the multi-dimensional parameter space is far from straightforward and therefore might be hard to automate. In [11], a different approach has been suggested, where the calculation is split into "virtual" (loop) and "real" contributions as in the conventional approach, but a subtraction formalism for the UV and soft/collinear divergences of the one-loop graphs has been worked out, such that the subtracted integrals can be performed numerically in four dimensions. While the subtractions act on a graph by graph basis, the subtraction terms are added back (in analytically integrated form) *after* having been summed over the graphs, as only the summation leads to expressions which are simple enough to be integrated analytically. Another promising approach in this context is the one of [12], which tries to tackle the problem of infrared divergences by its very root : Starting from the observation that the clash between the long-range nature of the interactions in a massless gauge theory and the assumption of asymptotically free external states causes the appearance of IR singularities in the "conventional" amplitudes, they show that an appropriate redefinition of the external states, which includes the long-range interactions, leads to S-matrix elements which are IR finite and apply it to the case  $e^+e^- \rightarrow 2\text{jets}$  at NLO. The method we suggest here to calculate one-loop amplitudes is oriented at the aim of automatisation as a main guideline. It follows to a large extent the "analytical road" in treating virtual and real emission corrections separately. This is feasible as the isolation of IR/UV divergences is straightforward if the discussed reduction formalism is used. UV renormalisation is well understood, and systematic methods for the combination of the IR divergences from the virtual corrections with their counterparts from the real emission contribution also exist [13–19]. The main problem consists in calculating

the remaining finite terms of the  $N$ -point one-loop amplitudes, especially for  $N = 5, 6$ , and we will concentrate on this point in what follows. By making the transition from analytical to numerical evaluation for these terms at an earlier stage than in the conventional approach, complicated cancellations between numerous dilogarithms can be avoided. We should mention that another approach to calculate loop integrals numerically is suggested by Passarino et al. [20,21], based on the Bernstein-Tkachov relation [22].

#### 4.1 Reduction to basic building blocks

A one-loop  $N$ -point amplitude involving particles with arbitrary masses (including the case  $m = 0$ ) will be reduced to basic building blocks using the method of [4], as outlined in Section 2. As basic building blocks, we choose scalar 2-point functions  $I_2^D$  and 3-point functions  $I_3^D$  in  $D$  dimensions and  $D + 2$  dimensional box functions  $I_4^{D+2}$ . The latter are infrared finite. Possible UV singularities are only contained in the 2-point functions and their subtraction is straightforward. The (soft and collinear) IR singularities are, as a result of the reduction, only contained in 2-point functions and 3-point functions with one or two light-like legs. In this form, they are easy to isolate and to subtract from the amplitude. However, the resulting expression in general still has integrable (threshold) singularities which hinder a successful numerical evaluation. For example, the general 6-point integral (where all internal lines have different masses  $m_i$  and all external legs are off-shell,  $p_i^2 = s_i$ ,  $i = 1 \dots 6$ ) depends on 21 kinematic invariants with one non-linear constraint among them, and its analytic form contains hundreds of dilogarithms. A numerical evaluation of the latter leads to large cancellations in certain kinematic regions and such a representation is therefore inappropriate.

#### 4.2 Parameter representation of basic building blocks

After reduction and separation of the divergent parts, we are left with finite integrals  $I_3^D$  and  $I_4^{D+2}$ . To evaluate them we first use standard Feynman parametrisation and then perform a sector decomposition<sup>1</sup>

$$1 = \Theta(x_1 > x_2, \dots, x_N) + \Theta(x_2 > x_1, \dots, x_N) + \dots + \Theta(x_N > x_1, \dots, x_{N-1}) \quad (\text{F.16})$$

for the integration over  $N$  parameters ( $N = 3$  for the triangle,  $N = 4$  for the box). Now, we carry out *only one* parameter integration. We obtain

$$I_3^D(s_1, s_2, s_3, m_1^2, m_2^2, m_3^2) = \left[ S_{Tri}^D(s_2, s_3, s_1, m_2^2, m_3^2, m_1^2) + S_{Tri}^D(s_3, s_1, s_2, m_3^2, m_1^2, m_2^2) + S_{Tri}^D(s_1, s_2, s_3, m_1^2, m_2^2, m_3^2) \right]$$

---

<sup>1</sup>We define the step function  $\Theta$  to be 1 if its argument is true, and 0 else.

$$\begin{aligned}
S_{Tri}^{D=4}(s_1, s_2, s_3, m_1^2, m_2^2, m_3^2) &= \int_0^1 dt_1 dt_2 \frac{1}{(1+t_1+t_2)} \frac{1}{At_2^2 + Bt_2 + C - i\delta} \\
&= \int_0^1 dt_1 \frac{2A}{\sqrt{R}} \left[ \frac{\log(2A+B-\sqrt{R}) - \log(B-\sqrt{R}) - \log(2A+B+T) + \log(B+T)}{T+\sqrt{R}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\log(2A+B+\sqrt{R}) - \log(B+\sqrt{R}) - \log(2A+B+T) + \log(B+T)}{T-\sqrt{R}} \right] \quad (F.17)
\end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned}
A &= m_2^2, \quad B = (m_1^2 + m_2^2 - s_2)t_1 + m_2^2 + m_3^2 - s_3 \\
C &= m_1^2 t_1^2 + (m_1^2 + m_3^2 - s_1)t_1 + m_3^2 \\
R &= B^2 - 4AC + i\delta, \quad T = 2A(1+t_1) - B
\end{aligned}$$

We show the explicit expressions only for the triangle, the ones for the box are analogous and can be found in [23]. In the case of vanishing masses or invariants, as long as the functions remain IR finite, analogous expressions can be derived.

### 4.3 Singularity structure

In order to analyse the singularity structure of the integrands, we explicitly separate imaginary and real part. One obtains

$$\begin{aligned}
S_{Tri}^{D=4}(s_1, s_2, s_3, m_1^2, m_2^2, m_3^2) &= \int_0^1 dt_1 \frac{4A}{T^2 - R} \left\{ \left[ \log(2A+B+T) - \log(B+T) \right] \right. \\
&+ \Theta(R < 0) \left[ \frac{\log(C) - \log(A+B+C)}{2} \right. \\
&+ \frac{T}{\sqrt{-R}} \left( \arctan\left(\frac{\sqrt{-R}}{B}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{-R}}{2A+B}\right) + \pi \Theta(B < 0 < 2A+B) \right) \Big] \\
&+ \Theta(R > 0) \left[ \frac{T - \sqrt{R}}{2\sqrt{R}} \left( \log(|2A+B-\sqrt{R}|) - \log(|B-\sqrt{R}|) - i\pi \Theta(B < \sqrt{R} < 2A+B) \right) \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{T + \sqrt{R}}{2\sqrt{R}} \left( \log(|2A+B+\sqrt{R}|) - \log(|B+\sqrt{R}|) + i\pi \Theta(B < -\sqrt{R} < 2A+B) \right) \right] \right\} \quad (F.18)
\end{aligned}$$

Three regions which lead to an imaginary part can be distinguished :

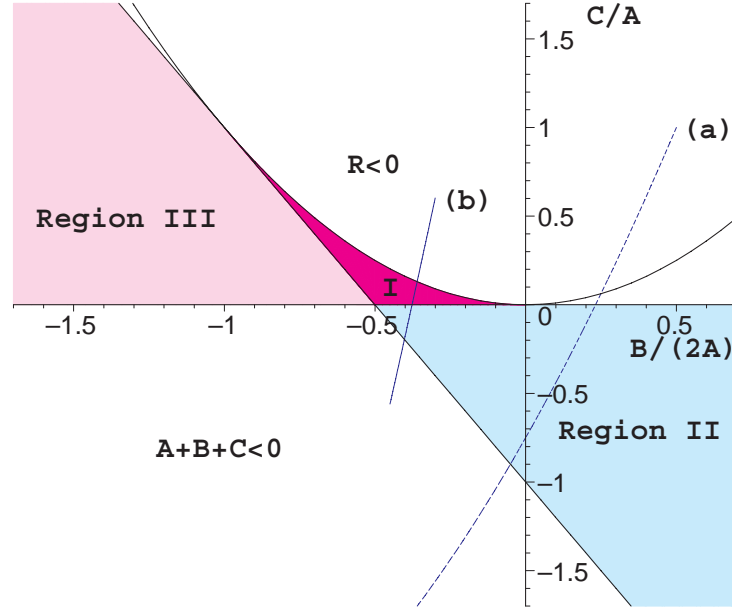


FIG. F.2 – Analytic regions of the box and triangle integrands. Within regions I, II and III the integrand has an imaginary part. The integrable square-root and logarithmic singularities are located at the boundaries of these regions.

**Region I :**  $A + B + C > 0, -2A < B < 0, C > 0 \Leftrightarrow (B < \pm\sqrt{R} < 2A + B)$ .

**Region II :**  $A + B + C > 0, C < 0 \Leftrightarrow (B < \sqrt{R} < 2A + B)$  and not  $(B < -\sqrt{R} < 2A + B)$ .

**Region III :**  $A + B + C < 0, C > 0 \Leftrightarrow (B < -\sqrt{R} < 2A + B)$  and not  $(B < \sqrt{R} < 2A + B)$ .

Region I is an overlap region where the imaginary part has two contributions. In regions II and III only one of the  $\Theta$ -functions in (F.18) contributes. All critical regions are shown in Fig. F.2, which illustrates the analytic structure of the integrand.

Line segment (a) corresponds to the integration region of a triangle function where only logarithmic singularities are present, while for line segment (b) square-root and logarithmic singularities are present. Note that the box function  $I_4^{D=6}$  has the same singularity structure. As  $I_3^{D=4}$  and  $I_4^{D=6}$  are the basic building blocks, this analysis of the singularity structure is done once and for all.

#### 4.4 Numerical integration

We now discuss the numerical evaluation of the analytic expressions derived above.<sup>2</sup> So far, we showed that any finite scalar  $N$ -point function can be written as a linear combination of the basic building block  $S_{Tri}^{D=4}$  of Eq. (F.18) and a similar 2-dimensional integral,  $S_{Box}^{D=6}$ , with coefficients that are rational functions of the kinematical invariants and masses. To avoid numerical instabilities, the residual dimensions of  $S_{Tri}^{D=4}$  and  $S_{Box}^{D=6}$  are then integrated over numerically. Since scalar function expressions can contain dozens of building blocks and an amplitude has to be evaluated many times to calculate a cross section, a fast method to evaluate the basic building blocks is called for. However, the naive application of standard numerical integration techniques is not sufficient to achieve this objective. This is due to the presence of integrable singularities and step discontinuities in the integrands, which the detailed analysis above revealed. It prevents the naive application of deterministic, integration-rule based algorithms that are better suited for fast evaluation than the more robust, but significantly slower Monte Carlo techniques commonly used to evaluate multi-particle cross sections in high energy physics. Several approaches can be pursued to achieve a sufficiently fast and accurate numerical integration of the basic building blocks. A first direction are automatic methods, i.e. methods that do not require knowledge of the exact location and type of the discontinuities. The key to success here are adaptive algorithms that iteratively divide the integration volume into non-uniform subvolumes and apply basic numerical integration methods to each subvolume until an optimal partition of the integration volume minimizes the total error. Using this approach the 1-dimensional integral of  $S_{Tri}^{D=4}$  can be integrated with negligible time requirements (fractions of a second). The 2-dimensional integral of  $S_{Box}^{D=6}$  is much more challenging, but can be tackled in the same spirit by combining deterministic and Monte Carlo integration techniques (see Ref. [24] and references therein). We note that the time required to integrate all  $S_{Box}^{D=6}$  building blocks of the scalar hexagon function using this approach depends on the kinematical configuration and, while sufficiently short at this stage, is no longer negligible. If, at a subsequent stage, i.e. for the calculation of a certain cross section, the  $S_{Box}^{D=6}$  building blocks had to be computed in a time comparable to the one for the  $S_{Tri}^{D=4}$  functions, a second direction could be pursued. Since the location of all singularities and step discontinuities is known analytically, one can identify regions with continuous integrand and in each region flatten the integrand either by transforming integration variables or subtracting singular approximations. The resulting bounded integrands could then be integrated numerically with standard deterministic methods at a speed that would facilitate millions of amplitude evaluations in a reasonable amount of time. To demonstrate the practicality of our method to evaluate multi-leg integrals, we show in Fig. F.3 a scan of the  $2m_t = 350$  GeV threshold of the 4-dimensional scalar hexagon function for a kinematical configuration appropriate for the Feynman diagram to the right in Fig. F.1.

---

<sup>2</sup>A more detailed description can be found in Ref. [23].

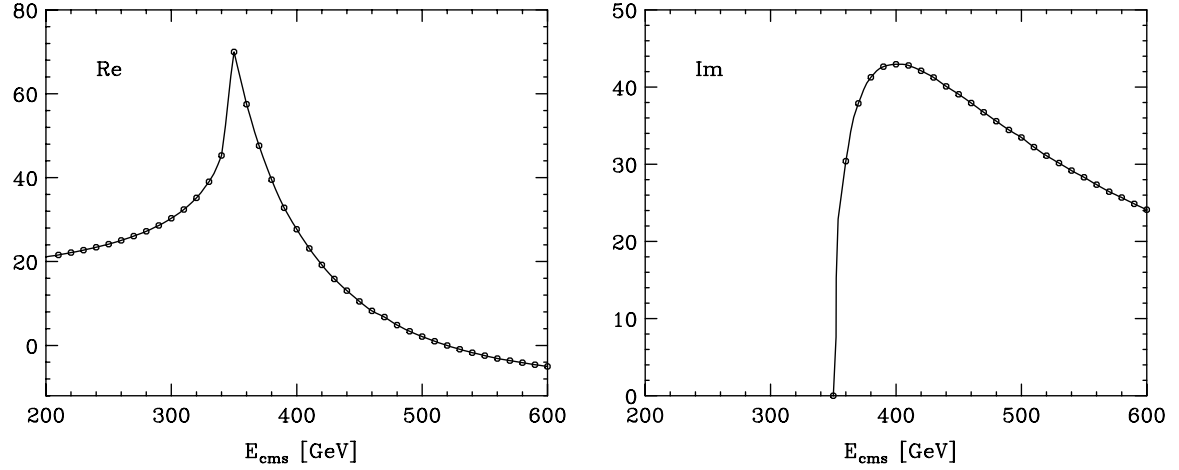


FIG. F.3 – Scan of the  $2m_t = 350$  GeV threshold of the 4-dimensional scalar hexagon function which corresponds topologically and kinematically to the rightmost Feynman diagram of Fig. F.1.

## 5 Conclusion

We have outlined new algebraic/numerical approaches for 1-loop calculations. We have shown that our algebraic formalism leads to compact representations of complicated 1-loop amplitudes. Furthermore we have constructed numerical methods for general hexagon kinematics. The presented methods are parts of a project to describe multi-particle/jet production at TeV colliders with  $2 \rightarrow 4$  kinematics at the 1-loop level.

## Acknowledgements

We would like to thank the conference organizers! This research has been supported by the Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF, Bonn, Germany) under the contract under the contract number 05HT1WWA2.



---

# Bibliographie

- [1] T. Binoth, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 116 (2003), 387–391.
- [2] T. Binoth, J. P. Guillet, G. Heinrich, and C. Schubert, Nucl. Phys. B615 (2001), 385–401.
- [3] Z. Bern, L. J. Dixon, and D. A. Kosower, Nucl. Phys. B412 (1994), 751–816.
- [4] T. Binoth, J. P. Guillet, and G. Heinrich, Nucl. Phys. B572 (2000), 361–386.
- [5] Z. Bern, L. J. Dixon, and D. A. Kosower, Phys. Rev. Lett. 70 (1993), 2677–2680.
- [6] T. Binoth, J. P. Guillet, and F. Mahmoudi, hep-ph/0312334.
- [7] V. Del Duca, F. Maltoni, Z. Nagy, and Z. Trocsanyi, JHEP 04 (2003), 059.
- [8] D. de Florian and Z. Kunszt, Phys. Lett. B460 (1999), 184–188.
- [9] D. E. Soper, Phys. Rev. Lett. 81 (1998), 2638–2641.
- [10] D. E. Soper, Phys. Rev. D62 (2000), 014009.
- [11] Z. Nagy and D. E. Soper, JHEP 09 (2003), 055.
- [12] D. A. Forde and A. Signer, hep-ph/0311059.
- [13] W. T. Giele and E. W. N. Glover, Phys. Rev. D46 (1992), 1980–2010.
- [14] W. T. Giele, E. W. N. Glover, and D. A. Kosower, Nucl. Phys. B403 (1993), 633–670.
- [15] S. Keller and E. Laenen, Phys. Rev. D59 (1999), 114004.
- [16] S. Frixione, Nucl. Phys. B507 (1997), 295–314.
- [17] L. Phaf and S. Weinzierl, JHEP 04 (2001), 006.
- [18] S. Catani, S. Dittmaier, M. H. Seymour, and Z. Trocsanyi, Nucl. Phys. B627 (2002), 189–265.
- [19] S. Catani and M. H. Seymour, Nucl. Phys. B485 (1997, Erratum ibid. B510 :503-504, 1997), 291–419.



- 
- [20] G. Passarino, Nucl. Phys. B619 (2001), 257–312.
- [21] A. Ferroglia, M. Passera, G. Passarino, and S. Uccirati, Nucl. Phys. B650 (2003), 162–228.
- [22] F. V. Tkachov, Nucl. Instrum. Meth. A389 (1997), 309–313.
- [23] T. Binoth, G. Heinrich, and N. Kauer, Nucl. Phys. B654 (2003), 277–300.
- [24] N. Kauer, Comput. Phys. Commun. 153 (2003), 233–243.



## Résumé

Le futur collisionneur du CERN (le LHC) possède un fantastique potentiel de découverte à condition d'avoir une prédiction quantitative de la QCD. Pour ce faire, il est nécessaire d'effectuer des calculs dans l'approximation NLO de manière à réduire la dépendance de la section efficace en fonction des échelles non physiques. Pour obtenir des résultats dans cette approximation, il faut calculer les sections efficaces des sous-processus partoniques contribuant à la réaction étudiée à l'ordre le plus bas ainsi que les corrections virtuelles (une boucle) et réelles. Le calcul des corrections virtuelles reste très compliqué si le nombre de particules externes est supérieur à quatre ou si les particules externes (internes) sont massives.

Dans cette thèse est proposée une méthode automatique pour effectuer les calculs à une boucle et à cinq pattes, et qui peut être généralisée aux cas de particules massives.

Dans une première partie, nous décrivons divers outils et méthodes nécessaires à de tels calculs. Nous les appliquerons ensuite au calcul de la réaction  $gg \rightarrow \gamma\gamma g$ , qui intéresse les expérimentateurs des expériences ATLAS et CMS comme bruit de fond à la recherche du Higgs, notamment pour décrire correctement la queue de la distribution transverse du boson de Higgs. Sera alors présenté le résultat explicite de cette amplitude pour chaque configuration d'hélicités sous une forme compacte et une représentation clairement invariante de jauge. Nous terminerons par une étude phénoménologique de cette réaction.

**Mots-clé :** Chromodynamique Quantique, QCD perturbative, corrections radiatives, calcul automatique, NLO, boson de Higgs, collisionneurs hadroniques, LHC, amplitude d'hélicité.

## Abstract

The future CERN collider (LHC) has a fantastic potential of discovery, provided QCD can be quantitatively predicted. To do so, it is necessary to work at NLO approximation in order to reduce the dependence of the cross-section on the non-physical scales. To obtain results in this approximation, one has to calculate the cross-sections of the partonic subprocesses contributing to the studied reaction at the lowest order, and also the virtual corrections (loop corrections) and the real corrections. The calculation of the virtual corrections remains very complicated if the number of external particles is greater than four or if the external (internal) particles are massive.

In this thesis, an automatic method which enables to calculate one loop diagrams with five external legs and which can be generalized to the case of massive particles is presented.

In a first part, we describe different tools and methods necessary to such calculations. We then apply them to the calculation of the  $gg \rightarrow \gamma\gamma g$  reaction, which interests the ATLAS and CMS experimentalists as the background for the Higgs boson search. We also give the explicit result for this amplitude for each helicity configuration in a compact form and a clearly gauge invariant representation. We finally present a phenomenological study of this reaction.

**Keywords:** Quantum Chromodynamics, perturbative QCD, radiative corrections, automatic calculation, NLO, Higgs boson, hadronic colliders, LHC, helicity-amplitude.